



## دو دوست مکمل: ریاضی محض و ریاضی کاربردی

محمد صالح مصلحیان\*

زیستی، ریاضیات مالی و علم داده را به وجود آورده است. ریاضیات کاربردی را می‌توان پل بین ریاضیات محض و دنیای بیرون نامید. پنلوپه مدی<sup>۵</sup> [۵]، فیلسوف ریاضی معاصر، براساس شواهد تاریخی در ریاضیات می‌گوید که ریاضیات کاربردی در واقع کاملاً محض است، به این معنا که مانند ریاضیات محض، باید مدلی را ابداع کند که فقط با پدیده واقعی مدل‌بندی شده مطابقت داشته باشد، اما به‌سادگی در آن پدیده قابل رویت نباشد، که خود نشان‌دهنده پیچیده‌تر بودن این مدل از آن پدیده است.

ریاضی‌دانان محض چهارچوب مستحکم و مبانی علمی دقیقی را فراهم می‌کنند که با کمک آن‌ها ریاضی‌دانان کاربردی قادرند به توسعه روش‌های کارآمد یا ابداع ابزارهای سودمند برای کمک به فیزیک‌دانان، شیمی‌دانان، زیست‌شناسان، متخصصان علوم رایانه و مهندسان در حل مسائل دنیای واقعی دست یابند. گاهی ممکن است این جریان معکوس شود، یعنی ریاضی‌دانان از مسائل خارج از ریاضیات ایده بگیرند و به اثبات قضیه‌هایی در ریاضیات محض بپردازند، چنانکه ارشمیدس<sup>۶</sup> یک مسئله هندسی را با استفاده از قانون اهرم‌ها در مکانیک اثبات کرد.

در [۴] دنیای ریاضی را به منزله یک هرم توصیف کرده است که در قله آن کاربردهای ریاضی در سایر علوم، تجارت، و صنعت قرار دارد. در میانه آن، ریاضیات کاربردی شامل ریاضیات زیستی، ریاضیات مالی، علوم رایانه، تحقیق در عملیات، بهینه‌سازی، محاسبات علمی، آنالیز عددی، کنترل، نظریه اطلاعات، آمار و غیره قابل مشاهده است و قاعده آن را ریاضیات محض متشکل از منطق، ترکیبیات، نظریه اعداد، جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه شکل داده است. اما مرز مشخصی بین این بخش‌ها نیست و در بعضی جاها نیز درهم‌تنیدگی بین ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی و کاربردهای ریاضی مشاهده می‌شود. باید توجه کرد که اگر قاعده این هرم به قدر کافی بزرگ نباشد، هرم ممکن است پایدار نباشد. برخی از دستاوردهای ریاضی‌دانان محض، کاربرد عملی دارند و برخی نه؛ اما همچنان برای نگه‌داشتن هرم و قوام بخشیدن به آن مورد نیاز هستند. کف هرم را مباحث مربوط به مبانی ریاضیات مانند منطق

ریاضیات محض مطالعه مفاهیم انتزاعی، مستقل از هرگونه کاربردی در دنیای فیزیکی است، توصیفی که به دیدگاه متافیزیکی افلاطون<sup>۱</sup> از ریاضیات به عنوان مطالعه مُثُل یا صورت‌های انتزاعی ابدی و تغییرناپذیر برمی‌گردد. هر چند بسیاری از این مفاهیم از دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرند، کاربردپذیری نتایج دغدغه اصلی ریاضی‌دانان محض نیست. ریاضیات محض به دنبال اثبات صدق گزاره‌های ریاضی است. در اصل، ابداع یا کشف ساختارهای ریاضی زیبا، تعمیم و نیز حل مسائل مهم، انگیزه‌بخش ریاضی‌دانان محض برای عمق‌بخشیدن و گسترش ریاضیات است. موریس کالاین<sup>۲</sup> می‌گوید: «ریاضیات عالی‌ترین دستاورد فکری و اصیل‌ترین ابداع ذهن آدمی است.»

هیچ‌یک از مکتب‌های شناخته‌شده ریاضی، از جمله افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی، منطق‌گرایی و شهودگرایی، توضیح کاملاً قانع‌کننده و جامعی از اینکه چرا ساختارهای ذهنی توصیف‌کننده دنیای واقعی هستند به دست نمی‌دهند؛ اما اخیراً ماکس تگمارک<sup>۳</sup> [۶]، ریاضی-فیزیک‌دان، توضیحی متفاوت عرضه کرده و اظهار نموده است که «جهان خود یک ساختار ریاضی انتزاعی» است. در کنار این دیدگاه‌ها، انسان‌گرایی‌روین هرش<sup>۴</sup> [۹]، ریاضیدان فقید، ریاضیات را بخشی از فرهنگ و تاریخ بشری می‌داند که از ماهیت فیزیولوژیک و محیط فیزیکی ما سرچشمه می‌گیرد و معتقد است ساختارهای ریاضی به همان دلیلی با جهان اطرافمان سازگار است که ریه‌های ما با جو زمین.

ریاضیات زبان علم است، به این معنی که بسیاری از نظریه‌های علمی با نمادها و مفاهیم ریاضی صورت‌بندی و بیان می‌شوند. بخشی از ریاضیات، تحت عنوان ریاضیات کاربردی به مدل‌سازی و شبیه‌سازی پدیده‌ها و محاسبات مربوط به آن پرداخته و به سایر علوم برای درک و توصیف بهتر طبیعت و کنترل آن کمک می‌کند. ریاضیات کاربردی به توسعه آن روش‌های ریاضی می‌پردازد که در علوم و فناوری‌های گوناگون استفاده می‌شود. کمکی که ریاضیات کاربردی به سایر حوزه‌ها برای حل مسائل آن‌ها می‌کند گاه آنقدر گسترده شده است که شاخه‌های خاصی در ریاضیات از جمله ریاضیات

<sup>۱</sup>Plato <sup>۲</sup>Morris Kline <sup>۳</sup>Max Tegmark <sup>۴</sup>Reuben Hersh <sup>۵</sup>Penelope Maddy <sup>۶</sup>Archimedes

کشفی انقلابی اما کاملاً محض بود تا اینکه در قرن بیستم آلبرت اینشتین<sup>۱۶</sup> آن را در نظریه نسبیت عام خود به کار برد.

۴. ظهور اعداد مختلط در قرن ۱۶ میلادی اتفاق افتاد و آنقدر انتزاعی بود که آن‌ها را اعداد موهومی می‌نامیدند. این اعداد به تدریج کاربردهایی در خود ریاضیات برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها یافتند و در قرن بیستم کاربردهای مهم آن‌ها در پردازش سیگنال، محاسبات مدارهای الکتریکی و مکانیک کوانتومی آشکار گردید.

۵. پیدایش گراف‌ها به اوایل قرن هجدهم برمی‌گردد، زمانی که لئونارد اویلر<sup>۱۷</sup> مسئله هفت پل کونیگسبرگ<sup>۱۸</sup> را حل کرد. این حوزه بخشی از ریاضیات محض قلمداد می‌شود، اما کاربردهای زیادی در ۱۰۰ سال اخیر در تحقیق در عملیات، شیمی، علوم رایانه و نیز علوم اجتماعی یافته است.

۶. نظریه ماتریس‌ها از قرن نوزدهم بدون توجه به کاربرد آن‌ها گسترش یافته است و اینک ابزاری کلیدی در همه علوم از جمله کدگذاری، اقتصاد، شیمی، و ارتباطات بی‌سیم است.

۷. تبدیل رادون را یوهان رادون در سال ۱۹۱۷ ابداع کرد. اما در دهه ۱۹۶۰ برای برش‌نگاری<sup>۱۹</sup> به کار رفت.

۸. تبدیل‌های موجک و فوریه در طراحی گرافیک‌های رایانه‌ای و در تجهیزات پزشکی مانند MRI، نمایشگر فشار خون و همچنین نمایشگر دیابت استفاده می‌شود.

۹. توپولوژی به درک ساختارهای مولکولی کمک می‌کند و توپولوژی جبری کاربردهایی در داده‌کاوی پیدا کرده است.

۱۰. نظریه گروه‌ها به میزان زیادی بر توسعه نظریه اوربیتال مولکولی در شیمی و بررسی تقارن‌ها تأثیر گذاشت.

۱۱. مسئله تصمیم در سال ۱۹۲۸ توسط ریاضی‌دان معروف دیوید هیلبرت<sup>۲۰</sup> به این صورت بیان شد که آیا روشی وجود دارد که بتواند درستی یا نادرستی گزاره‌های ریاضی را در تعداد متناهی مرحله تعیین کند. آلونزو چرچ<sup>۲۱</sup> و آلن تورینگ<sup>۲۲</sup> در دهه ۱۹۳۰ به این مسئله پاسخ منفی دادند. تورینگ یک ماشین انتزاعی به نام ماشین تورینگ را صورت‌بندی کرد که مبنای رایانه‌های کنونی است.

۱۲. جان کینز<sup>۲۳</sup> نظریه انقلابی خود در اقتصاد را از نظر روش‌شناختی از هندسه غیراقلیدسی الهام گرفت. او برای توسعه نظریه خود، یکی از بدیهیات اساسی نظریه اقتصاد کلاسیک را مورد سؤال قرار داد.

ریاضی و نظریه مجموعه‌ها تشکیل می‌دهد که به مفهوم متعارف، کاربردی تلقی نمی‌شوند، اما هرم ریاضیات بدون آن‌ها نمی‌تواند به درستی توسعه یافته و قوام یابد. به علاوه، ریاضیات به‌طور عام، از طریق آموزش شیوه‌های حل مسئله و مهارت‌های شناختی، روش‌های تصمیم‌گیری فرد را بهبود می‌بخشند و نقش مهمی در شکل‌دادن به آنچه «تفکر منطقی» در انسان خوانده می‌شود، ایفا می‌کند.

ریاضیات محض در مرزهای تفکر آزاد سیر می‌کند، گرچه همیشه چشمی نیز به سرشت مسائل در سایر شاخه‌های علم دارد. ایده‌ها در ریاضیات محض براساس علاقه ذهنی به حل مسائل و تعمیم ساختارها ایجاد می‌شوند و ممکن است بعدها کاربردی بیابند یا نیابند. کار یک ریاضی‌دان محض را نباید بر اساس کاربردپذیری فوری و مستقیم دستاوردهای آن ارزیابی کرد. جیمز کلرک ماکسول<sup>۷</sup> معتقد بود که «هیچ چیز کاربردی‌تر از یک نظریه خوب نیست». گواه دیگری بر اهمیت ریاضی محض، با ملاحظه زمینه‌های تحقیقاتی برندگان مدال فیلدز حاصل می‌شود که عموماً به کسانی اهدا می‌شود که به حل مسائل بنیادی یا خلق نظریه‌های جدید در محض‌ترین شاخه‌های ریاضی پرداخته‌اند.

تاریخ ریاضی نشان داده است که آنچه در زمانی نتایج ذهنی، مجرد و بدون کاربرد تلقی شده است اغلب در زمانی دیگر در علوم دیگر مانند فیزیک، شیمی، علوم رایانه و مهندسی به کار برده شده است. برای اثبات این ادعا نگاهی به برخی از قسمت‌های تاریخ علم ریاضی می‌اندازیم؛ [۷] و [۸].

۱. نظریه اعداد یکی از محض‌ترین حوزه‌های ریاضی است. قضیه کوچک فرما<sup>۸</sup> در حدود سال ۱۶۰۰ میلادی اثبات شد و امروز ستون فقرات دستگاه رمزنگاری RSA<sup>۹</sup> به حساب می‌آید. RSA به‌طور گسترده برای ایمن‌سازی ارتباطات اینترنتی، تجارت الکترونیک و زنجیره بلوکی<sup>۱۰</sup> استفاده می‌شود.

۲. مقاطع مخروطی را آپولونیوس<sup>۱۱</sup> در قرن سوم قبل از میلاد ابداع کرد و عده زیادی آن‌را تمرینی برای فکر می‌دانستند تا اینکه یوهانس کپلر<sup>۱۲</sup> و ایزاک نیوتون<sup>۱۳</sup> به اهمیت آن‌ها در توصیف مدار سیارات و نحوه حرکت اجرام پی بردند.

۳. حدود ۲۰۰۰ سال، ریاضی‌دانان تلاش کردند تا اصل پنجم اقلیدس را، که سرشتی تجربی نداشت، از چهار اصل دیگر استخراج کنند. اما در قرن ۱۹، نیکولای لوباجفسکی<sup>۱۴</sup> و بانوش بویایی<sup>۱۵</sup> نشان دادند که این اصل مستقل از سایر اصول اقلیدس است و بدین ترتیب هندسه‌های نااقلیدسی کشف شدند. این

<sup>7</sup>James Clerk Maxwell <sup>8</sup>Fermat's little theorem <sup>9</sup>Rivest-Shamir-Adleman <sup>10</sup>Blockchain <sup>11</sup>Apollonius <sup>12</sup>Johannes Kepler <sup>13</sup>Isaac Newton <sup>14</sup>Nikolai Lobachevsky <sup>15</sup>Janos Bolyai <sup>16</sup>Albert Einstein <sup>17</sup>Leonhard Euler <sup>18</sup>Seven Bridges of Königsberg <sup>19</sup>Tomography <sup>20</sup>David Hilbert <sup>21</sup>Alonzo Church <sup>22</sup>Alan Turing <sup>23</sup>John Keynes

محض، به دفعات پرسش «کاربرد این نتایج چیست؟» را شنیده‌ایم. پرسیدن این سؤال تا آنجا که با هدف کمک به ارتباط بیشتر شاخه‌های محض و کاربردی ریاضیات باشد مشکلی ندارد؛ ولی در بسیاری از موارد، چنین سؤالی از درک نادرست ریاضیات و ساختار آن نشأت می‌گیرد و تفکری سطحی‌نگرانه را نشان می‌دهد. بهتر است در سیاستگذاری و عملکردمان، به هر دو تحقیقات محض و کاربردی اهمیت دهیم و آن‌هایی را که از محتوای غنی ریاضی برخوردارند ارج نهیم.

سپاسگزاری: نویسنده از آقایان دکتر مجید سلیمانی دامنه و دکتر قدیر صادقی برای ارائه نکات و پیشنهادهای سازنده صمیمانه تشکر می‌کند.

#### مراجع

- [۱] هاردی، گادفری هرولد، دفاعیه یک ریاضیدان، ترجمه سیامک کاظمی، نشر علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۵.
- [۲] هالموس، پال، ریاضیات کاربردی بد ریاضیاتی است، ترجمه محمدرضا بهاری، نشر ریاضی، ۷ (۱۳۶۹)، ۵۴-۵۹.
- [3] Buckley, Stephen M., Why do research in pure mathematics?, *Ir. Math. Soc. Bull.* **72** (2013), 39-44.
- [4] ERCIM, Introduction to the Special Theme: Maths for Everyday Life, University of Helsinki, Finland, 2008.
- [5] Maddy, P., How applied mathematics became pure, *Rev. Symb. Log.* **1** (2008), 16-41.
- [6] Tegmark, Max., The mathematical universe, *Found. Phys.* **38** (2008), no. 2, 101-150.
- [7] <https://www.maynoothuniversity.ie/mathematics-and-statistics/undergraduate-studies/why-do-research-pure-mathematics>.
- [8] <https://thescipub.com/abstract/jmssp.2014.421.422>.
- [9] [https://www.edge.org/conversation/reuben\\_hersh-what-kind-of-thing-is-a-number](https://www.edge.org/conversation/reuben_hersh-what-kind-of-thing-is-a-number).

۱۳. نظریه گره‌ها نقش مهمی در درک چگونگی عملکرد DNA دارد.  
 ۱۴. هندسه کلاسیک و معادلات دیفرانسیل جزئی در مهندسی پزشکی و طراحی لنزهای چشمی استفاده می‌شود.  
 ۱۵. طبقه‌بندی و مشخص کردن تصویرهای دیجیتالی میلیون‌ها اثر انگشت، حجیم و تقریباً غیرقابل تصور است. نظریه موجک‌ها امکان فشرده‌سازی اطلاعات را سریع، نسبتاً ساده و با هزینه خیلی کمتری انجام می‌دهد؛ به علاوه، دسترسی به اطلاعات و بازیابی آنها سریع‌تر انجام می‌شود.

در گروه‌های ریاضی بسیاری از دانشگاه‌های معتبر کشورهای توسعه‌یافته، در کنار شاخه‌های بین‌رشته‌ای و رشته‌های نوپدید در ریاضیات و در کنار ریاضیات کاربردی، تحقیقات در مباحث ریاضی محض از جمله منطق، نظریه مجموعه، نظریه اعداد، ترکیبیات، جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه با قوت انجام می‌شود؛ زیرا به ریاضیات به‌عنوان یک نظام یکپارچه توجه می‌کنند؛ دستگامی که وجود هر قسمت و قطعه آن خواه ریاضیات محض باشد یا ریاضیات کاربردی برای درست کار کردن آن ضروری است.

زندگی روزانه ما با فناوری‌های پیشرفته مانند رایانه، اینترنت، تلفن همراه هوشمند گره خورده است، در حالی که مبنای علمی آن‌ها را ریاضیات تشکیل داده است. ریاضیات امنیت اطلاعات ما در تبادلات مالی را تأمین می‌کند. همچنین در توسعه روش‌ها و ابداع دستگاه‌های پیشرفته پزشکی به کار می‌رود. این ریاضیات همگون، متشکل از جنبه‌های محض و کاربردی، همواره در کشورهای پیشرفته مورد توجه بوده است.

در چند سال اخیر، متأثر از دیدگاه تجاری‌سازی علم و فناوری، بر تحقیقات زودبازده توجه بیش از حد شده است. در نتیجه آن، درخواستی افراطی در معرفی کاربرد فوری برای همه دستاوردهای فکری در جامعه دانشگاهی کشور مطرح شده است که همه حوزه‌های نظری را تحت تأثیر منفی خود قرار داده است. اندیشه آزاد، سرشت پژوهش در دانشگاه است و این تقاضا، آن‌را محدود می‌سازد و افق تاریکی برای پیشرفت علم و درنهایت فناوری در کشور به وجود می‌آورد. بدیهی است که سودمندی برای تحقیقات در حوزه‌های صنعتی مهم است اما در حوزه‌های نظری مفهومی مبهم است.

همه ما باید همچون سایر کشورهای توسعه‌یافته، به هر دو جنبه محض و کاربردی ریاضیات توجه کنیم و دستاوردهای آن‌ها را صرفاً براساس عمق، وسعت و تاثیرگذاری بسنجیم. این روزها در کنفرانس‌ها، پس از ارائه نتایج مربوط به برخی شاخه‌های ریاضی