ریاضی‌دانان یک خانوادهٔ جدید از اعداد اول ظریف پیدا کردند*

استیو نادیس
محمد جلوداری ممقانی**

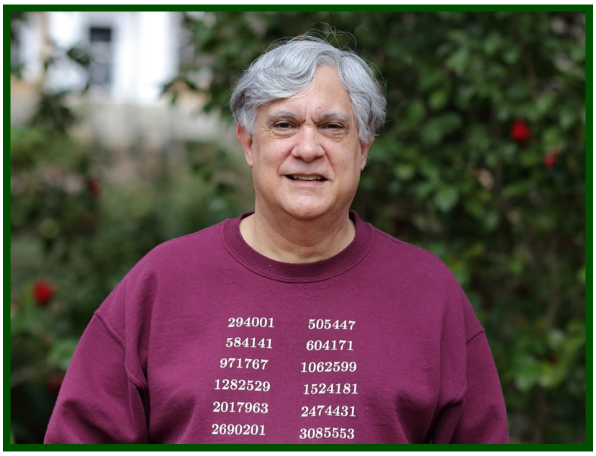
چکیده:
پژوهشگران وجود یک دستهٔ فراگیر از اعداد اول ظریف را که با تغییر هریک از بی‌نهایت رقم آن‌ها، عددی مرکب حاصل می‌شود، ثابت کردند. با این حال، هنوز مثالی در این مورد ارائه نشده است.

نگاهی به اعداد ۲۹۴۰۰۱، ۵۰۵۴۴۷، و ۵۸۴۱۴۱ بیندازید. آیا متوجهٔ چیز خاصی در آن‌ها می‌شوید؟ ممکن است متوجه شده باشید که همهٔ آن‌ها اول هستند، اما این اعداد خاصِ اول، غیرمعمول‌تر و عجیب‌تر هستند. با انتخاب هر رقم از هرکدام و تغییر آن به هر رقم دیگری، یک عدد مرکب حاصل می‌شود. مثلاً اگر در ۲۹۴۰۰۱ رقم ۱ را به ۷ تبدیل کنیم، عدد حاصل، یعنی ۲۹۴۰۰۷ بر ۷ بخش‌پذیر و لذا مرکب است؛ اگر به ۹ تغییر دهید، بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود.

این نوع اعداد را «اعداد اول رقمی ـ ظریف[۱]» یا به صورت کوتاه‌تر «اعداد اولِ ظریف» می‌نامند. این اعداد از کشف‌های ریاضی نسبتاً جدید به‌شمار می‌آیند. در ۱۹۷۸ موری کلامکین[۲] ریاضی‌دان و طراح پرکار مسئله، این سؤال را مطرح کرد که آیا چنین اعدادی وجود دارند؟ پرسش وی به‌سرعت پاسخی از مشهورترین حل کنندهٔ مسئله در تمام زمان‌ها، پال اردوش[۳]، دریافت کرد. وی ثابت کرد که این اعداد نه‌تنها وجود دارند، بلکه تعداد آن‌ها نامتناهی است، نتیجه‌ای که در هر مبنای عددنویسی درست است. سایر ریاضی‌دانان، ازجمله ترنس تائو[۴]، برندهٔ مدال فیلدز، نتیجهٔ اردوش را توسعه داده‌اند. تائو در سال ۲۰۱۱ ثابت کرد که «نسبت مثبتی» از اعداد اول، ظریف هستند. نتیجه‌ای که در هر مبنا درست است. «نسبت مثبت» در اینجا به این معنی است که میانگین فاصلهٔ بین اعداد اولِ ظریفِ متوالی وقتی که خود اعداد اول بزرگ می‌شوند، نسبتاً ثابت باقی می‌ماند، به عبارت دیگر، اعداد اولِ ظریف در بین اعداد اول، کمیاب نیستند.

اکنون مایکل فیلازتا[۵] از دانشگاه کارولینای جنوبی با انتشار دو مقاله، این مفهوم را با عمق بیشتری مطالعه کرده و ردهٔ اعداد اول ظریف را گسترش داده است. پال پولاک[۶] از دانشگاه جورجیا دربارهٔ کار او می‌گوید: «نتیجهٔ فوق‌العاده‌ای است».

با الهام از نتایج اردوش و تائو، فیلازتا فکر کرد که اگر در طرف چپ عدد اول ظریف داده شده، بی‌نهایت رقم صفر قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد. به‌هرحال، اعداد ۵۳ و ...۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳ مقدار یکسانی دارند؛ آیا اگر یکی از آن بی‌نهایت صفرها را با یک رقم ناصفر تعویض کنیم، عدد حاصل عددی مرکب خواهد بود؟



مایکل فیلازتا که روی ژاکتش ۲۰ عدد اول ظریف را نشان داده است.

فیلازتا این اعداد را در صورت وجود «اعداد اول ظریف گسترده[۷]» نامید و ویژگی‌های آن‌ها را در یک مقالهٔ مشترک با دانشجوی سابق‌اش جرمیا ساوثویک[۸] مطالعه و در ماه نوامبر ۲۰۲۰ منتشر کرد. جای تعجب نیست که پیدا کردن اعدادی از این نوع دشوارتر است. «۲۹۴۰۰۱ یک عدد اول ظریف است که ظریف گسترده نیست»، پولاک می‌گوید «زیرا اگر ...۰۰۰۰۰۲۹۴۰۰۱» را به ۱۰۲۹۴۰۰۱ تبدیل کنیم عدد اول دیگری به‌دست می‌آوریم.

با اینکه فیلازتا و ساوثویک تمام اعداد صحیح تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ را برای یافتن مثالی از یک عدد اول ظریف گسترده بررسی کرده‌اند، ولی هنوز در این کار موفق نشده‌اند. بااین‌حال این مسئله مانع آن‌ها برای اثبات گزاره‌هایی قوی در مورد ویژگی‌های این اعدادِ فرضی نشده است.

نخست، آن‌ها ثابت کردند که این اعداد در مبنای ۱۰ وجود دارند و حتی مجموعهٔ آن‌ها بی‌نهایت عضو دارد. در ادامه و در مرحلهٔ بعدی، آن‌ها ثابت کردند که بخش مثبتی از اعداد اول، ظریفِ گسترده است، مشابه حکمی که تائو در مورد اعداد اول ظریف اثبات کرده بود. ساوثویک در رسالهٔ دکتری خود، این نتایج را در مبناهای ۲ تا ۹، ۱۱ و ۳۱ نیز ثابت کرده است.

پولاک تحت تأثیر این دستاوردها قرار گرفته و می‌گوید «با این اعداد می‌توان بی‌نهایت کار انجام داد و بی‌آنکه انجام کدام کار اهمیتی داشته باشد، درهرحال، پاسخ مرکب شما تضمین شده‌است.»

[1]digitally delicate prime [2]Murray Klamkin [3]Paul Erdős [4]Terence Tao [5]Michael Filaseta [6]Paul Pollack [7]widely digitally delicate prime [8]Jeremiah Southwick

اثبات آنها مبتنی بر دو ابزار است. اولی دستگاه‌های پوششی یا همنهشتی‌های پوششی نامیده می‌شود که اردوش در ۱۹۵۰ برای حل مسئله‌ای دیگر مطرح کرد. ساوثویک می‌گوید: «چیزی که یک دستگاه پوششی ارائه می‌دهد، عبارت است از تعداد زیادی جعبه همراه با تضمین حضورِ حداقل یک عدد صحیح مثبت در هر یک از آن‌ها.» اگر مثلاً همهٔ اعداد صحیح مثبت را بر ۲ تقسیم کنید، دو جعبه خواهید داشت: یکی شامل اعداد زوج که باقیماندهٔ تقسیم این اعداد بر ۲ برابر است با صفر و دیگری شامل اعداد فرد است که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۲ برابر است با ۱. به‌این‌ترتیب تمام اعداد صحیح «پوشش» داده می‌شوند و اعداد واقع در یک جعبه «همنهشت» خواهند بود.

البته وضعیت دربارهٔ اعداد اول ظریف گسترده، بسیار پیچیده است. شما به جعبه‌های بسیاری نیازمند خواهید بود چیزی از مرتبهٔ $۱۰^{۲۵۰۰۰}$ و هر عدد اول در یکی از این جعبه‌ها با تغییر یکی از ارقامش حتی ارقام صفر طرف چپاش لزوماً تبدیل به عددی مرکب می‌شود. اما، برای این که عدد اولی، ظریف گسترده باشد، باید در صورت تغییر تنزلِ یکی از ارقامش به عددی مرکب تبدیل شود. این همان جایی است که ابزار دوم وارد می‌شود. روش غربال، که به یونانیان باستان تعلق دارد، روشی‌است برای شمردن، برآوردکردن یا قائل شدن محدودیتی روی مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت که در ویژگی‌های مشخصی صدق می‌کنند.

فیلازتا و ساوثویک یک استدلال غربالگری، مشابهٔ رویکرد تائو در سال ۲۰۱۱، به‌کار بردند و نشان دادند که اگر اعداد اول جعبهٔ مذکور و یکی از ارقام را تغییر تنزل دهیم، یک نسبت مثبت این اعداد اول مرکب خواهد شد. به‌عبارت‌دیگر، یک نسبت مثبت از این اعداد اول، ظریف گسترده است.

پولاک می‌گوید «قضیهٔ فیلازتا-ساوثویک زیبا و توضیحی بدیع از توانایی همنهشتی‌های پوششی است».

فیلازتا و دانشجوی فعلی‌اش یاکوب جولیرات[9] در ژانویهٔ گذشته ادعایی شگفت‌انگیز مطرح کردند: یک دنبالهٔ طولانی با طولی دلخواه از اعداد اول متوالی وجود دارد که هر عضوش ظریف گسترده است. بنابراین می‌توان ۱۰ عدد اول متوالی یافت که همگی ظریف گسترده باشند. اما برای انجام این کار باید حجم عظیمی از اعداد اول را امتحان کرد. فیلازتا می‌گوید «شاید بیشتر از تعداد اتم‌های موجود در جهانِ قابل مشاهده». وی این کار را با برنده شدن ۱۰ بار متوالی در بلیط بخت‌آزمایی مقایسه می‌کند: احتمال انجام چنین کاری بسیار ضعیف ولی هنوز ناصفر است.

فیلازتا و جولیرات قضیهٔ خود را در دو مرحله ثابت کردند. نخست، آن‌ها با استفاده از استدلال‌های دستگاه پوششی ثابت کردند که جعبه‌ای وجود دارد که شامل بی‌نهایت عدد اول ظریف گسترده است. در مرحلهٔ دوم، آن‌ها از قضیه‌ای که در سال ۲۰۰۰ توسط دانیل شیو[10] اثبات شده بود، استفاده و ثابت کردند که در جایی در لیست اعداد اول، تعداد دلخواهی از اعداد اول متوالی وجود دارد که همگی در این جعبه قرار دارند. این اعداد اول با توجه به اینکه در آن جعبه قرار دارند، لزوما اعداد ظریف گسترده هستند.

کارل پومرانس[11] از کالج دارتموت از این مقاله‌ها بسیار استقبال می‌کند و می‌گوید «فیلازتا استاد استفاده از همنهشتی‌های پوششی در حل مسائل جالب نظریهٔ اعداد است. ریاضیات می‌تواند یک تمرین برای به‌کار انداختن ابزارهای قدرتمند و نیز یک سرگرمی محض باشد.» در عین حال پومرانس متذکر می‌شود «که ممکن است نمایش عدد در یک دستگاه عددنویسی بر حسب رقم‌هایش مناسب باشد، اما این نکته را روشن نمی‌کند که این عدد حقیقتاً چیست». او اشاره می‌کند که راه‌های بنیادی زیادی برای نمایش اعداد وجود دارد، مثلاً روش نمایش اعداد اول مرسن ـ اعداد اولی که به صورت $۲^p - ۱$ نمایش داده می‌شوند که در آن p عددی اول است، یکی از آن‌هاست. فیلازتا با این گفته موافق است، بااین‌حال، مقاله‌های اخیر سؤالات بسیاری را که ارزش تحقیقاتی بسیاری دارند مطرح می‌کنند. فیلازتا کنجکاو است بداند که آیا اعداد اول ظریف گسترده در هر مبنایی وجود دارند؟ جولیرات به نوبهٔ خود این سؤال را از خود می‌پرسد «آیا بی‌نهایت عدد اول وجود دارد که اگر به جای تعویض یک رقم با رقمی دیگر، بین دو رقم‌شان یک رقم قراردهیم، عدد حاصل مرکب می‌شود؟»

پومرانس یک سؤال چالش‌برانگیز دیگر مطرح می‌کند: آیا تمام اعداد اول در بی‌نهایت، ظریف یا ظریف گسترده هستند؟ به عبارت دیگر آیا تعداد اعداد اول که از این دو نوع نیستند متناهی است؟ احساس وی این است که جواب این سوال منفی است، بااینحال او و فیلازتا این سؤال را قابل توجه می‌دانند، مسئله‌ای که هیچکدام نمی‌دانند که چگونه بی‌توسل به حدسی دیگر حل می‌شود.

پومرانس می‌گوید «داستان تحقیق ریاضی، گویای این نکته است که از قبل نمی‌دانیم چگونه مسئله‌ای چالشی را حل کنیم و اینکه این حل به چه چیز مهمی منجر خواهد شد. از قبل نمی‌توانیم تصمیم بگیریم که: امروز کار با ارزشی انجام خواهیم داد. هر چند البته بسیار خوب می‌شود اگر چنین اتفاقی بیفتد».

** Steve Nadis, Mathematicians Find a New Class of Digitally Delicate Primes, *Quanta Magazine*, April 2021.

**دانشگاه علامه طباطبایی

[9]Jacob Juillerat [10]Daniel Shiu [11]Carl Pomerance