

حمله ساختاری ریاضی دان‌ها و اختلال در مسئله قدیمی قرن*

اریکا کلاریچ

ترجمه و تنظیم: مریم صفازاده و سعید علیخانی**

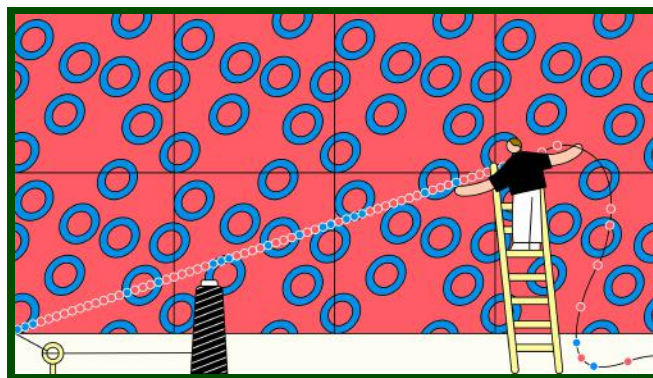
چکیده

در مقاله‌ای جدید که نشان می‌دهد چگونه می‌توان ریسمان‌های بی‌نظم بلندتری ایجاد کرد، ثابت می‌شود که یک حدس معروف به طرز قابل توجهی اشتباه است.

افزایش یابند قبل از اینکه بخش‌های اشیاء یکسان، پدیدار شوند. سؤال مهره-ریسمان از لحاظ بیانی ساده، اما مسئله بسیار سختی است: برای رشته‌های طویل، آرایش‌های مهره‌ای زیادی برای یکی یکی امتحان کردن وجود دارد.



بن گرین در دانشگاه آکسفورد، سال ۲۰۱۷.



چند مهره قرمز (R) و آبی (B) می‌توانید پشت سرهم قرار دهید بدون اینکه یک دنباله بزرگ با فاصله مساوی از رنگ یکسان ایجاد شود؟ با استفاده از یک الگوی شبه ساختاری از بیضی شکل‌ها، یک ریاضی‌دان رکورد قبلی را با توجه به سؤال «چه مدت می‌توانید مهره‌ها را رشته کنید» شکست.

ژاکوب فاکس^۵ از دانشگاه آکسفورد می‌گوید «گاهی سؤالات به ظاهر ساده و پایه‌ای وجود دارد که واقعاً چیزی زیادی را نمی‌توان از آن درک کرد. فکر می‌کنم این یکی از آن سؤالاتی بود که واقعاً عدّه زیادی را متعجب کرد که چرا درک اندکی از آن داریم».

ریاضی‌دان‌ها، نزدیک به یک قرن بر این باور بودند که نمی‌توان مهره‌های ریسمان را به طور نامحدود حفظ کرد. هنگامی که پارامترهای خود را برای هر رنگ انتخاب کردید (منظور جایگاه مهره با آن رنگ است)، می‌توانید فقط تعداد زیادی مهره را رشته کنید، قبل از اینکه مجبور شوید دنباله‌ای با فاصله مساوی ایجاد کنید که طولانی‌تر از چیزی است که می‌خواهید تحمل کنید. همان‌گونه که پارامترهای قرمز و آبی را افزایش می‌دهید، تعداد کل مهره‌هایی که می‌خواهید رشته کنید، افزایش می‌یابد، اما با چه سرعتی؟

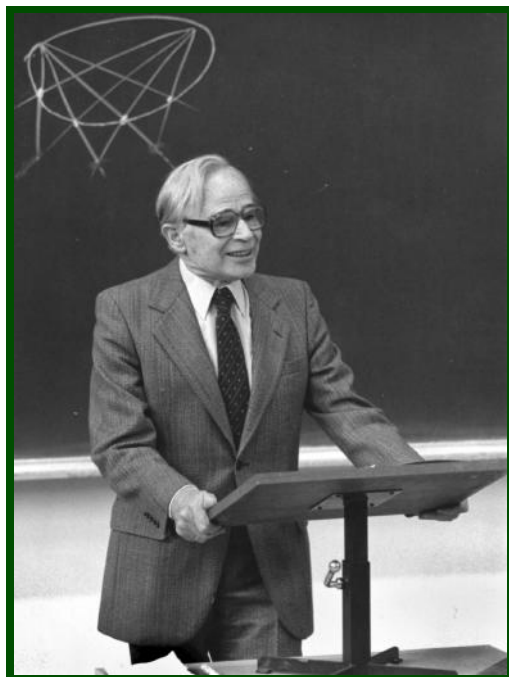
در حالتی از مسئله که شما حتی دنباله‌های آبی با فاصله یکسان را ممنوع می‌کنید، گراهام^۶ گمان می‌کند که یک رابطه ساده‌ای وجود دارد: طول بزرگ‌ترین ریسمان مهره‌ای ممکن، تقریباً برابر مربع پارامتر مهره قرمز است. همه داده‌های عددی که ریاضی‌دان‌ها جمع‌آوری کرده‌اند، جواب مثبتی به درست بودن حدس گراهام داده‌اند.

بن گرین^۱ ریاضی‌دانی از دانشگاه آکسفورد، گام بزرگی به سوی درک یک مسئله ترکیبیاتی تقریباً ۱۰۰ ساله برداشت، همان‌گونه که اندرو گرانویل^۲ از دانشگاه مونترال بیان کرد، او نشان می‌دهد که حدس معروف اخیر «به طرز قابل توجهی اشتباه است». این مقاله جدید که نشان می‌دهد چطور ریسمان‌های بی‌نظم بلندتری نسبت به آنچه که قبلاً ریاضی‌دان‌ها فکر می‌کرده‌اند، از مهره‌های رنگی ایجاد کنیم، از سال ۱۹۴۰ گرایش و شاخه‌ای را تعمیم داده است که در بیشتر زمینه‌های علوم کامپیوتر کاربرد دارد.

این حدس که حدود ۱۷ سال پیش توسط ران گراهام^۳ یکی از پیشگامان ریاضیات گسسته در نیم‌قرن گذشته شکل گرفت، در مورد این مسئله است که چه تعداد مهره قرمز و آبی را می‌توانید بدون ایجاد دنباله‌های طولانی از دانه‌های یکرنگ با فاصله یکسان به هم رشته کنید. (شما باید تصمیم بگیرید که کلمه «طولانی» برای هررنگ به چه معناست.)

این مسئله یکی از مسئله‌های قدیمی در نظریه رمزی^۴ است که می‌پرسد اشیاء ریاضی متفاوت و غیریکسان تا چه اندازه می‌توانند

¹Ben Green ²Andrew Granville ³Ron Graham ⁴Ramsey theory ⁵Jacob Fox ⁶Graham



واندر واردن در بن آلمان حدود سال ۱۹۸۵.

برای ریاضی دانان سخت است به طور دقیق درک کنند که چگونه عددهای واندر واردن درحالی که پارامترها را تغییر می‌دهیم، عوض می‌شوند. اما اگر تصمیم بگیرید که هر دنباله‌ی A_n با فاصله‌ی یکسان را مجاز ندانید، به عبارت دیگر اگر پارامتر A_n را مثلاً در نقطه‌ی ۳ ثابت نگه دارید، آنگاه یک الگو ظاهر خواهد شد. دیدیم که اگر پارامتر قرمز هم در جایگاه ۳ باشد، توسط مهره‌ی ۹ گیر خواهید افتاد. ریاضی دانان محاسبه کردند که اگر پارامتر قرمز در جایگاه ۱۰ باشد، توسط مهره‌ی ۹۷ گیر می‌افتید؛ اگر ۱۵ باشد، آن گاه با مهره‌ی ۲۱۸ گیر خواهید افتاد و اگر ۲۰ باشد، با رسیدن به مهره‌ی ۳۸۹ تسلیم می‌شوید. در هر مورد تعداد مهره‌هایی که می‌توانید رشته کنید به طرز چشمگیری به مربع جایگاه پارامتر قرمز نزدیک است. همه داده‌هایی که تاکنون جمع‌آوری شده، این الگو را به دست می‌دهد.

حدود سال ۲۰۰۴، گراهام حدس زد که الگو برای همه مقادیر پارامتر قرمز ادامه پیدا می‌کند (اجازه دهید جایگاه قرمز را r بنامیم). در عرض چند سال، ریاضی دانان راه‌هایی پیدا کردند که رشته‌های مهره‌ای بسازند که طول آن به r^2 نزدیک باشد، اما برای اثبات حدس کافی نیست. این نشان می‌دهد که شما می‌توانید حدود r^2 مهره بدون گیر افتادن، رشته کنید، اما این احتمال را باز می‌گذارد که شما می‌توانید بیشتر از این، به رشته کردن مهره‌ها ادامه دهید.

هنگامی که گراهام به گرین درباره‌ی حدس گفت، حس ششم گرین این بود که باید اشتباه باشد. او گفت: «اصلاً قابل قبول به نظر نرسید».

اما حالا گرین ثابت کرده که حدس اشتباه است. او در یک مقاله ۶۸ صفحه‌ای نشان داده است که چگونه می‌توان ریسمان‌های مهره‌ای بلندتری نسبت به آنچه گراهام پیش‌بینی کرده، تولید کرد. سارا پلوس^۷ از مؤسسه مطالعات پیشرفته پرینستون در نیوجرسی گفت: وقتی بن پیش‌نویسی برایم فرستاد، متعجب شدم «فکر می‌کنم شگفت‌انگیز است».

ساختار گرین که هندسه و سیستم‌های دینامیکی را برای آرایش ریسمان‌های مهره‌ای بی‌نظم، ترکیب می‌کند بر یک ساختار ریسمان-مهره‌ای اولیه بنا شده که در موضوعاتی از ضرب ماتریس تا رمزنگاری کاربرد پیدا کرده است. فاکس گفت: «این نوع ساختار برای سؤالاتی در علوم کامپیوتر بسیار حائز اهمیت است».

یک الگوی غیر قابل قبول

اگر تمایل شدیدی به بی‌نظمی دارید، باید مانع هر نوع دنباله با فاصله‌ی یکسان تحت هر شرایطی در ریسمان تان شوید. با عقل جور در نمی‌آید که درباره‌ی دنباله‌های دومهره‌ای با فاصله یکسان صحبت کنیم، بنابراین شما سعی می‌کنید که از دنباله‌هایی با سه یا تعداد بیشتری مهره اجتناب کنید.

شما به سادگی می‌توانید تعداد کمی مهره را رشته کنید، اما خیلی زود به مشکلاتی برمی‌خورید. برای مثال، اگر شش مهره اول تان به صورت RBBRBR باشند، هیچ راهی برای ادامه دادن وجود ندارد. اضافه کردن یک مهره‌ی A_n ، مهره‌هایی را با فاصله‌ی یکسان در نقاط ۳، ۵ و ۷ قرار می‌دهد؛ اضافه کردن یک مهره‌ی قرمز، مهره‌هایی را با فاصله‌ی یکسان در نقاط ۱، ۴ و ۷ قرار می‌دهد. یک جست‌وجوی ساده کامپیوتری نشان می‌دهد این مهم نیست که چگونه رشته مهره خودتان را شروع می‌کنید، شما توسط مهره ۹ گیر خواهید افتاد.

اگر می‌خواهید بیش از هشت مهره را رشته کنید، خیلی زود تسلیم خواهید شد. شاید به این نتیجه برسید که با دنباله‌های A_n با فاصله‌ی یکسان، با کمتر از ۵ مهره و با دنباله‌های قرمز با کمتر از ۱۲ مهره مشکل حل خواهد شد. در سال ۱۹۲۷، بارتل لیندرت واندر واردن^۸ ثابت کرد که برای هر جفت پارامتری که انتخاب می‌کنید، طول متناهی وجود دارد که در آن گیر خواهید افتاد. این طول‌ها امروزه عددهای واندر واردن نام‌گذاری شده‌اند. (مانند ریاضی دان‌های دیگری که پس از او آمدند، واندر واردن این مسئله را بر حسب عددهای رنگی به جای مهره‌های رشته‌ای بیان کرد، اما هردوی آن‌ها معادل هستند.)

⁷Sarah Peluse ⁸Bartel Leendert van der Waerden

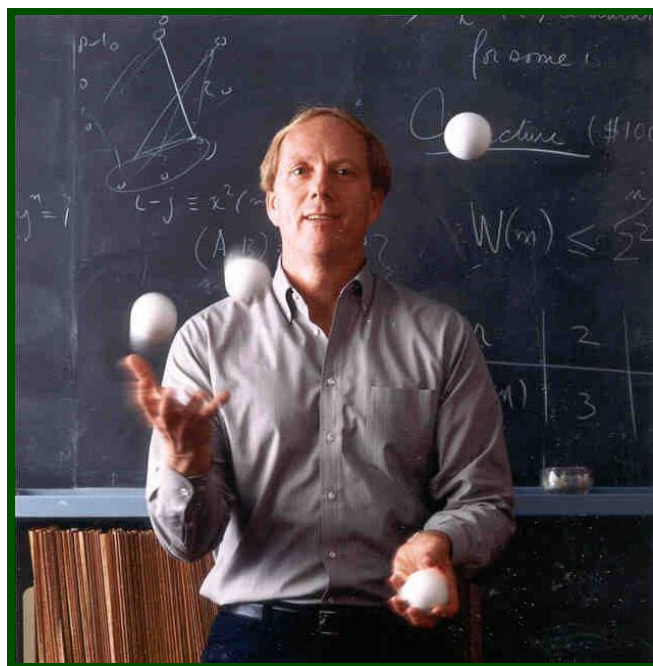
ساختار و تصادفی بودن

گرین حاضر نبود مسئله را به‌عهده ریاضی‌دانان دیگر بگذارد. آن‌هنگام که او کاملاً معتقد بود این حدس اشتباه است، اما همه داده‌ها نشان می‌داد که درست است، گفت: «من این را یک موقعیت جذاب برای تلاش و کار کردن روی آن می‌دانم». شهود او این بود که ریسمان‌های مهره‌ای بی‌نظمِ طولیل تری نسبت به آنچه گراهام پیش‌بینی کرد، وجود دارد. اگرچه ساختار اولیه نمی‌توانست حدس را رد کند، اما او هنوز احساس می‌کرد که برخی اصلاحات، ممکن است کارساز باشد.

ریسمان‌های مهره‌ای اولیه با ساختاری توسط فلیکس برند^۹ در سال ۱۹۴۶ آغاز شد که بر پایه یک واقعیت هندسی اساسی قرار دارد. یک دایره آبی روی یک ورق کاغذ قرمز در نظر بگیرید. اگر دو نقطه روی دایره را با یک پاره‌خط به هم وصل کنید، نقطه میانی روی پاره‌خط، درون دایره قرار می‌گیرد، بنابراین قرمز است. این سه نقطه با فاصله یکسان از هم قرار دارند و همه آن‌ها آبی نیستند. این یک مشاهده ابتدایی است، اما فلیکس با انتقال نقاط روی صفحه (یا در ابعاد بالاتر) به جایگاه‌های مهره، از این هندسه به‌عنوان پایه برای ساختن ریسمان‌های مهره بدون دنباله‌های آبی با فاصله یکسان استفاده کرد.

در طول این سال‌ها، این ساختار کاربردهای زیادی پیدا کرده است. برای مثال، اواخر سال گذشته، یکی از مؤلفه‌های کلیدی در یک الگوریتم رکوردشکنی^{۱۰}، برای ضرب ماتریس‌ها را تشکیل داد. دیوید کُنن^{۱۱} از مؤسسه تکنولوژی کالیفرنیا عنوان کرد که «ساختار فلیکس برند، به‌طرز شگفت‌انگیزی در برخی جاها کاربرد دارد».

در مواجهه با مسئله واندر واردن، گرین تمام توجه خود را روی تعمیمی از کار برند متمرکز کرد که در سال ۲۰۰۸ توسط مایکل الکین^{۱۲} از دانشگاه بن-گورین بسط داده شده بود و سپس اواخر آن سال توسط خود گرین و جولیا ولف^{۱۳} از دانشگاه کمبریج اقتباس داده شد. در این اقتباس، دوباره یک دایره آبی (کمی ضخیم‌شده) را روی یک زمینه قرمز در نظر می‌گیریم. اما این بار، این طراحی را به‌عنوان یک کاشی مربع‌شکل تصور می‌کنیم و از کپی‌های یکسان کاشی برای پرکردن کل صفحه استفاده می‌کنیم و یک الگوی تکرارشونده از دایره‌های آبی روی زمینه قرمز ایجاد می‌کنیم. سپس تجسم می‌کنیم که نقطه انتهایی در شروع ریسمان در یک نقطه مشخص در صفحه، گره زده شده است و ریسمان را در جهتی که به‌طور تصادفی انتخاب‌شده محکم می‌کشیم، بنابراین، روی صفحه، صاف قرار می‌گیرد و به‌طور غیرقابل پیش‌بینی از ناحیه قرمز و آبی عبور



مرحوم ران گراهام یک ریاضی‌دان و شعبده‌باز ماهر بود.

گرین فکر کرد باید امکان‌پذیر باشد که حدس را به‌سرعت با استفاده از ساختارهای توسعه‌یافته برای یک مسئله مرتبط رد کرد، در جایی که شما سعی می‌کنید از دنباله‌های آبی با فاصله یکسان اجتناب کنید، اما اهمیتی به کاری که مهره‌های قرمز انجام می‌دهند، نمی‌دهید. برای این مشکل محققان راه‌هایی یافتند که از تعداد زیادی مهره آبی بدون ایجاد دنباله‌های آبی، دست بکشند. گرین مشکوک شد که این مهره‌های آبی فراوان، دنباله‌های قرمز بالقوه را مختل می‌کنند، با آنکه رشته‌های مهره‌ای به‌طور ویژه برای این هدف طراحی نشده‌اند. اما وقتی او به‌دقت به این رشته‌های مهره‌ای نگاه کرد، دریافت که مهره‌های آبی به‌گونه‌ای توزیع شده‌اند که بخش‌های وسیعی از قلمرو قرمز را برجای می‌گذارند که در آن الگوها می‌توانند شکل بگیرند. او متوجه شد که این مثال‌ها منجر به پاسخی ساده برای مسئله واندر واردن نخواهد شد.

گرین به‌صورت دوره‌ای به مسئله بازگشت و مدتی را صرف تلاش برای اثبات حدس گراهام کرد، زیرا نتوانست آن را رد کند. او آن را در یک فهرست از ۱۰۰ مسئله حل نشده در ریاضیات گنجانده و نوشت «حالا من معتقدم که جواب این مسئله ممکن است مثبت باشد». در هر صورت او گفت: «فکر نمی‌کنم هیچ‌وقت آن را با اعتقاد زیادی احساس کرده باشم، که درست است». او عنوان کرد که تکرار کردن این حدس بیشتر از آنکه بیانگر ایده‌های او باشد، چالشی برای دیگران بود.

⁹Felix Behrend ¹⁰record-breaking algorithm ¹¹David Conlon ¹²Michael Elkin ¹³Julia Wolf

ریسمان‌های مهره‌ای در نهایت بیشتر از r^3 خواهد شد و سپس r^4 و r^5 و هر توانی بیشتر از r . به عبارت دیگر، برای مقادیر بزرگ r ریسمان‌های مهره‌ای بسیار طولانی‌تر از آنچه گراهام پیش‌بینی کرد، هستند.

این جهش به توان‌های بالاتر از r تنها پس از آنکه r خیلی بزرگ شود، اتفاق می‌افتد. این ممکن است توضیح دهد که چرا گراهام در وهله اول گول خورد: داده‌هایی که ریاضی‌دانان جمع‌آوری کرده بودند، فقط از چند ده مقدار اول r عبور می‌کرد که برای انجام جهش به توان‌های بالاتر بسیار کوچک هستند. کُنُلن عنوان کرد: «این یک نتیجه واقعاً عالی است». هنگامی که گرین در فوریه این مقاله را ارسال کرد، کنلن به او ایمیل زد: «من دیگر به ندرت از نتایج شگفت‌زده می‌شوم، اما این مرا شگفت‌زده کرد».

این ترسیم، بین ساختار و تصادفی بودن قرار دارد؛ انتخاب دقیق هندسه دایره‌ها به علاوه مجموعه‌ای از انتخاب‌های تصادفی مانند جهت ریسمان، اندازه مهره‌ها، چگونگی تحت فشار بودن دایره‌ها و جایی که پراکنده شده‌اند. گرین عنوان کرد: «این یک اجتماع تصادفی از اشیاء ساختاریافته است. من فکر می‌کنم این نوع شهود چیزی است که احتمالاً در مسائل دیگر مطرح می‌شود».

پلوس معتقد بود که اغلب ساختارهای رنگ‌آمیزی در نظریه رمزی بیشتر به تصادفی بودن متمایل می‌شوند. او گفت: «واقعاً دشوار است رنگ‌آمیزی‌هایی به دست آورد که تصادفی نیستند. شما مجبورید که یک ایده واقعاً، واقعاً بخردانه مانند بن داشته باشید».

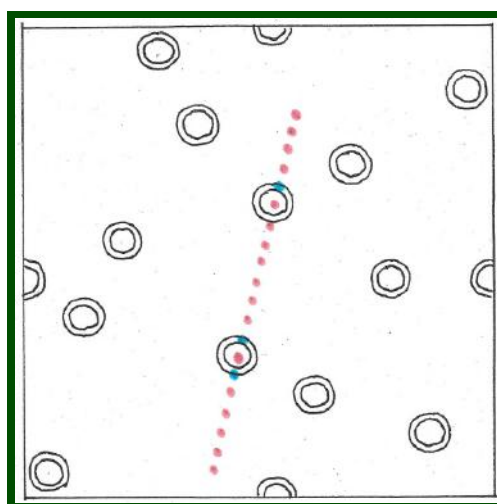
ساختار بن، سخن آخر درباره مسئله واندر واردن نیست. درست مانند ساختارهای قبلی، او نمی‌تواند ثابت کند که به‌طور قابل ملاحظه ریسمان‌های مهره‌ای طولی‌تر وجود ندارد. اگرچه ماه گذشته زاج هاتر^{۱۴} دانشجوی کارشناسی آکسفورد، توانست با اصلاح ساختار گرین، طول ریسمان مهره‌ای را افزایش دهد. بنابراین، قطرهای دایره به‌طور تصادفی متنوع هستند. اما فاکس مایل است به این فکر کند که نتیجه گرین با اعداد (درست) واندر واردن در تقریب یکسان هستند. او گفت: «به نظر من پاسخی بسیار رضایت‌بخش است». گراهام سال گذشته در سن ۸۴ سالگی درگذشت، هفت ماه قبل از اینکه گرین مقاله‌اش را ارسال کند. فاکس گفت: «اگر ران در میان ما بود، بسیار هیجان زده می‌شد».

*E. Klarreich, [Mathematician Hurls Structure and Disorder Into Century-Old Problem](#), *Quanta Magazine*, 2020.

**دانشگاه یزد

می‌کند. ما مهره‌ها را رشته کرده و رنگ هر مهره را مطابق با رنگ نقطه‌ای که مرکز مهره به آن می‌رسد، انتخاب می‌کنیم. گرین و ولف نشان دادند که دینامیک مسیر رشته در سراسر کاشی‌ها، اغلب رشته‌های مهره‌ای را ایجاد می‌کند که دارای دانه‌های آبی زیادی است اما دنباله‌های آبی با فاصله یکسانی ندارند.

این مسئله با این ساختار، از نقطه نظر سؤال واندر واردن این است که برای جلوگیری از تشکیل دنباله‌های آبی، دایره‌های آبی باید نسبتاً کوچک نگه داشته شوند. این گستره‌های عظیمی که از رنگ قرمز برجای می‌ماند، باعث می‌شود بدون ایجاد یک دنباله قرمز طولی، رشته کردن خیلی از مهره‌ها ناممکن شود.



طرحی که گرین در سخنرانی استفاده کرد، شرح می‌دهد که چطور حدس گراهام را رد کرد.

اما در روزهای پایانی ۲۰۲۰، هنگامی که گرین برای یک پیاده‌روی آرام با همسر و فرزندانش بیرون رفته بود، ناگهان ایده‌ای به ذهنش رسید: چه اتفاقی می‌افتد اگر به جای یک دایره آبی کوچک در هر کاشی، از دایره‌های کوچک زیادی استفاده کنید که به‌طور تصادفی پراکنده شده‌اند؟ در طول ماه بعد، گرین درک کرد که اگر فقط اندازه و تعداد دایره‌های مناسب را انتخاب کنید و چند چروک اضافی را مدیریت کنید (برای مثال دایره‌ها کمی فشرده شوند)، آنگاه دایره‌های آبی پراکنده، قلمرو قرمز را، بدون ایجاد فرصت‌های قابل توجه برای تشکیل دنباله‌های آبی، کاملاً مختل خواهد کرد. این باعث شد که مهره‌های زیادی بدون ایجاد هر نوع دنباله طولی قرمز یا آبی، رشته شوند.

گرین قادر بود، نشان دهد همان‌گونه که پارامتر جایگاه قرمز (r) افزایش می‌یابد، طولانی‌ترین ریسمان‌های مهره‌ای در نهایت بیش‌تر از r^2 رشد خواهند کرد. آنگاه همان‌گونه که r به افزایش ادامه دهد،