نمودارهای وِن

محمد فرخی درخشنده قوچان *

چکیده

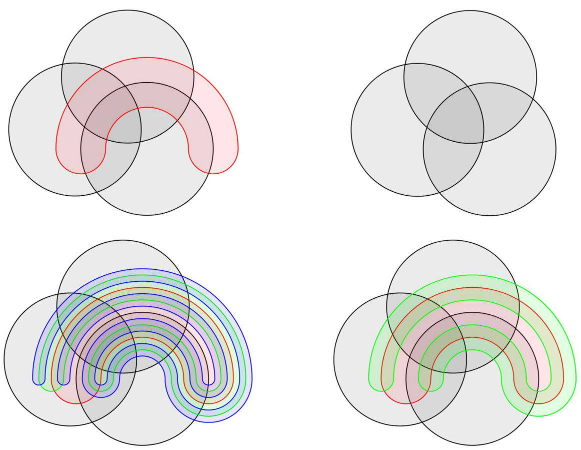
زمستان سال گذشته تعدادی از دانش‌آموزان مدارس فرزانگان ۱ و ۲ شهر زنجان در قالب گروه‌های دونفره از طریق خانهٔ علم دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان و با راهنمایی اساتید این دانشگاه به‌ویژه اساتید دانشکدهٔ ریاضی طرح‌های خود را در نهمین جشنواره نوجوان خوارزمی استان زنجان ارائه کردند. از این بین خانم‌ها، ثنا حسنی و زهرا مجتهدی به‌عنوان یکی از گروه‌های شرکت‌کننده با طرحی دربارهٔ نمودارهای وِن موفق به کسب رتبهٔ اول در سطح استان زنجان شدند. این امر بهانه‌ای شد تا در اینجا به یادآوری و معرفی دقیق نمودارهای وِن به‌عنوان یکی از مفاهیم ترکیبیاتی جذاب و نسبتاً عمیق، اما کمتر شناخته‌شده در ریاضیات بپردازیم.

همان‌گونه که می‌دانیم از نمودارهای وِن برای نمایش مجموعه‌ها و ارتباط بین اعضایشان استفاده می‌شود، اما از نظر تاریخی بیشتر به‌عنوان ابزاری برای بیان و نمایش قیاس‌های منطقی، به‌ویژه زمانی که با استدلال‌های پیچیده‌تر (مانند مسئلهٔ اینشتین و ...) مواجهیم ساخته شده‌اند ([۱] را ببینید). در پی تلاش‌های ناموفق افراد مختلف از جمله لایب‌نیتز و اویلر جهت ارائهٔ مدلی جامع، جان وِن در سال ۱۸۸۰ در مقالهٔ [۱۰] روشی ساده و یکپارچه برای ساختن این نمودارها ارائه کرد که امروزه به‌نام نمودارهان وِن شناخته می‌شوند. اما یک نمودار وِن چیست؟ می‌دانیم یک خم بستهٔ جُردَن[1] یک خم بستهٔ ساده در صفحه است، یعنی تصویر دایرهٔ واحد تحت یک تابع پیوسته و یک‌به‌یک در صفحه. فرض کنید C^0 و C^1 به‌ترتیب ناحیه‌های باز کران‌دار درونی و بی‌کران بیرونی خم بسته جُردَن دلخواه C را نمایش دهند. دراین‌صورت، یک نمودار وِن برای n مجموعه یا یک نمودار n-وِن مجموعه‌ای از n خم بستهٔ جُردَن مانند $V=\{C_1,\dots,C_n\}$ در صفحه است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

۱. به‌ازای هر $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$، مجموعهٔ $C_1^{\varepsilon_1}\cap\dots\cap C_n^{\varepsilon_n}$ ناتهی و همبند است؛

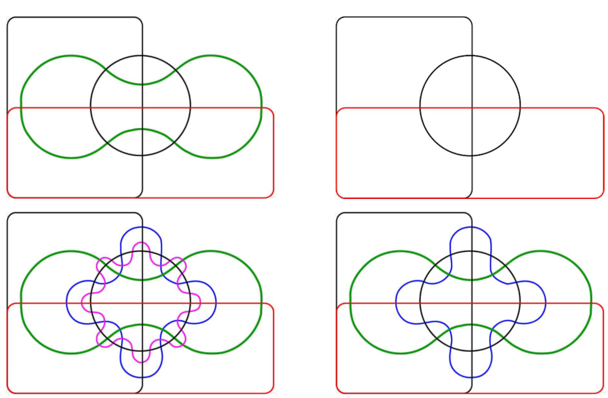
۲. به ازای هر $1\leq i<j\leq n$، اشتراک دو خم C_i و C_j از تعداد متناهی نقطه تشکیل شده است.

یک نمودار n-وِن را ساده گویند، هرگاه اشتراک هر سه خم آن، تهی باشد. وِن با فرایندی استقرایی نشان داد به ازای هر عدد دلخواه n یک نمودار n-وِن ساده وجود دارد.



نمودارهای وِن ۳، ۴، ۵، و ۶ تایی

پس از وقفه‌ای نسبتاً طولانی، افراد دیگری نیز شروع به ساختن نمودارهای وِن با روش‌های متفاوت کردند که یکی از نمونه‌های مهم آن نمودارهای وِن اِدواردز[2] هستند.



نمودارهای وِن ادواردز ۳، ۴، ۵، و ۶ تایی

[1] Jordan curve [2] Anthony W. F. Edwards

اغلب نمودارهای وِن ساخته‌شده به‌صورت استقرایی از نمودارهای وِن کوچک‌تر ساخته می‌شوند، اما این عمل با شروع از یک نمودار وِن دلخواه کار ساده‌ای نیست.

حدس ۱. (وینکْلِر ۱۹۸۴ [۱۱]). *هر نمودار n-وِن ساده را می‌توان با اضافه کردن یک خم جدید به یک نمودار $(n+1)$-وِن ساده گسترش داد.*

در سال ۱۹۹۶، چیلاکاماری[3] و همکارانش در [۵] نشان دادند یک نمودار n-وِن دلخواه را می‌توان به یک نمودار $(n+1)$-وِن گسترش داد. بااین‌وجود، نمودار وِن حاصله هیچ وقت ساده نیست و حدس بالا را حل نمی‌کند.

مفاهیم بسیاری در مورد نمودارهای وِن تعریف و بررسی شده‌اند که برخی از آن‌ها را به‌صورت خلاصه معرفی می‌کنیم. فرض کنید $V=\{C_1,\dots,C_n\}$ یک نمودار وِن باشد. در این صورت

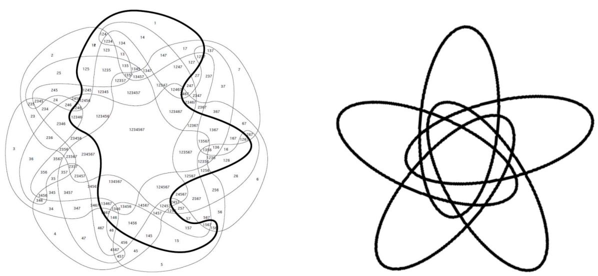
(۱) نمودار V را متقارن گویند، هرگاه به ازای هر $1\le i<n$، از دوران منحنی C_i به‌اندازهٔ $2\pi/n$ رادیان منحنی C_{i+1} به‌دست آید؛

(۲) نمودار V را یکنوا گویند، هرگاه هر ناحیه از وزن k با یک ناحیه از وزن $k-1$ (اگر $k>0$) و یک ناحیه از وزن $k+1$ (اگر $k<n$) مجاور باشد. وزن هر ناحیه برابر با تعداد خم‌هایی است که درونشان شامل آن ناحیه است؛

(۳) نمودار V را محدب گویند، هرگاه خم‌های آن محدب باشند.

دو نمودار وِن را که از نظر توپولوژیکی با هم یا تصویر آینه‌ایِ همدیگر همسان‌ریخت باشند یکریخت می‌گویند. در سال ۱۹۹۸، بُلتِنا[4] و همکارانش در [۴] نشان دادند مفاهیم یکنوایی و محدب بودن با هم معادلند، یعنی یک نمودار وِن یکنواست اگر و تنها اگر با یک نمودار وِن محدب یکریخت باشد. نکتهٔ جالب توجه این است که یکنوایی یک ویژگی توپولوژیکی و محدب بودن یک ویژگی هندسی است.

بدون شک جذاب‌ترین مسئله در مورد نمودارهای وِن، مسئلهٔ وجود نمودارهای وِن متقارن است. با یک تا سه دایره به‌سادگی می‌توان نمودارهای وِن متقارن ساخت، اما ساخت نمودارهای وِن متقارن بزرگ‌تر نه‌تنها ساده نیست که درحالت‌کلی حتی ممکن هم نیست. در سال ۱۹۶۳، هِندِرسُن[5] در [۸] نشان داد برای اینکه یک نمودار n-وِن متقارن وجود داشته باشد، عدد n الزاماً باید اول باشد. بنابراین، هیچ نمودار ۴-وِن یا ۶-وِن متقارنی وجود ندارد. پس از آن نمودارهای ۵-وِن و ۷-وِن متقارن ساده و سپس با استفاده از روش‌های جدید و پیشرفته‌تر نمودارهای ۱۱-وِن متقارن ساخته شدند.

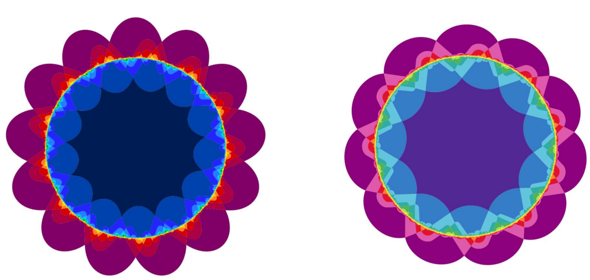


نمودارهای ۵-وِن و ۷-وِن ساده متقارن گرونباوم

سرانجام در سال ۲۰۰۴، گِریگز[6] و همکارانش در [۷] این روش‌های جدید را به‌کار برده و نشان دادند به ازای هر عدد اول p، یک نمودار p-وِن متقارن یکنوا با کمترین تعداد رأس ممکن، یعنی $\binom{p}{\lfloor p/2\rfloor}$ وجود دارد. بااین‌وجود، نمودارهای آن‌ها نه‌تنها ساده نیستند که تعداد رأس‌هایشان نسبت به نمودارهای وِن ساده، یعنی 2^p-2 بسیار کمتر است. ازاین‌رو، مسئلهٔ وجود نمودارهای وِن متقارن ساده همچنان حل‌نشده باقی مانده است.

حدس ۲. *به‌ازای هر عدد اول p، یک نمودار p-وِن سادهٔ متقارن وجود دارد.*

در سال ۲۰۱۴، مَکَانی[7] و راسکی[8] در [۹] با روشی مشابه اما با به‌کارگیری روش‌های بیشتر و به‌کمک محاسبات کامپیوتری نشان دادند نمودارهای ۱۱-وِن و ۱۳-وِن ساده متقارن نیز وجود دارند.



نمودارهای ۱۱-وِن و ۱۳-وِن ساده متقارن

[3]Kiran B. Chilakamarri [4]Bette Bultena [5]David W. Henderson [6]Jerrold Griggs [7]Khalegh Mamakani [8]Ruskey

نمودارهای وِن را می‌توان به‌روش‌های متنوعی تعمیم و تغییر داد. یکی از این روش‌ها گسترش مفهوم نمودارهای وِن از صفحه به فضاهای اقلیدسی با بعد دلخواه است. دراین‌صورت، به‌جای خم‌های بستهٔ جردن در صفحه، از تصاویر همسان‌ریخت کره‌های $(d-1)$-بعدی در فضاهای d-بعدی استفاده می‌شود. اگر $S_1, \dots, S_n$ چنین تصاویری باشند، آنگاه $V = \{S_1, \dots, S_n\}$ را یک نمودار n-وِن d-بعدی گوییم، هرگاه

۱. به‌ازای هر $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ مجموعهٔ $S_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap S_n^{\varepsilon_n}$ ناتهی و همسان‌ریخت با درون یا بیرون کرهٔ واحد $(d-1)$-بعدی باشد؛

۲. به ازای هر $1 \leq i < j \leq n$ اشتراک S_i و S_j برابر با اجتماع تعداد متناهی زیرمجموعهٔ $(d-2)$-بعدی از $\mathbb{R}^d$ باشد.

همچنین نمودار n-وِن V را ساده گوییم، هرگاه اشتراک هر k عضو آن اجتماع تعداد متناهی زیرمجموعهٔ $(d-k)$-بعدی از $\mathbb{R}^d$ باشد. به‌سادگی می‌توان دید نمودارهای n-وِن در هر فضای d-بعدی وجود دارند ([۶] را ببینید). ازاین‌رو، هر مسئله در مورد نمودارهای وِن روی صفحه را می‌توان در فضاهای از بعد دلخواه نیز بررسی کرد.

برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر در مورد نمودارهای وِن می‌توانید به مقالهٔ مروری [۲] یا فایل سخنرانی [۳] مراجعه کنید.

مراجع

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Syllogism.

[2] https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennEJC.html.

[3] https://mfarrokhidg.github.io/pages/talks/Venn%20diagrams.pdf.

[4] B. Bultena, B. Grünbaum, and F. Ruskey, Convex drawings of intersecting families of simple closed curves, 1998.

[5] K.B. Chilakamarri, P. Hamburger, R.E. Pippert, Hamilton cycles in planar graphs and Venn diagrams, *J. Combin. Theory Ser. B* **67** (2) (1996), 296–303.

[6] M. Farrokhi Derakhshandeh Ghouchan, Fully reducible simple Venn diagrams, arXiv:2206.03323.

[7] J. Griggs, C.E. Killian, C. D. Savage, Venn diagrams and symmetric chain decompositions in the Boolean lattice, *Electron. J. Combin.* **11** (1) (2004), #R2.

[8] D. W. Henderson, Venn diagrams for more than four classes, *Amer. Math. Monthly* **70** (4) (1963), 424–426.

[9] K. Mamakani and F. Ruskey, New roses: simple symmetric Venn diagrams with 11 and 13 curves, *Discrete Comput. Geom.* **52** (1) (2014), 71–87.

[10] J. Venn, On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **9**(59) (1880), 1–18.

[11] P. Winkler, Venn diagrams: some observations and an open problem, *Congr. Numer.* **45** (1984), 267–274.

*دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان