# یادداشتی بر سخنرانی پروفسور امیدعلی شهنی کرم‌زاده در شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (مازندران-بابلسر)

قاسم شعبانی *

سخنرانی بی‌نظیر پروفسور کرم‌زاده تحت عنوان «**تفاوت یادگیری ریاضی با فهم آن**» و تفکرات ایشان در آموزش و فهم ریاضیات، و همچنین مطالعهٔ یادداشتی از دکتر مهرداد نامداری که در شمارهٔ ۱۷۵ خبرنامهٔ انجمن ریاضی منتشر و در بخشی از آن اشاراتی به قضیهٔ مورلی از منظر ایشان داشته است، اینجانب را برآن داشت که برداشت خود را از سخنرانی ایشان به رشتهٔ تحریر دربیاورم. این یادداشت از سخنرانی جلسهٔ عمومی کنفرانس می‌باشد. بنده به متن یا فایل سخنرانی ایشان دسترسی نداشتم بنابراین اگر قصوری در این نوشتار باشد، پیشاپیش پوزش می‌طلبم.

مطالب داخل کروشه در این متن از صحبت‌هایی است که در خارج از سالن کنفرانس با پروفسور کرم‌زاده داشتم یا افزوده‌های اینجانب در ارتباط با متن است. ازاین‌رو، مسئولیت این مطالب بر عهدهٔ اینجانب است. قبل از آن، همهٔ همکاران ریاضی و دانشجویان عزیز (خصوصاً دانشجویان رشتهٔ آموزش ریاضی) را با تأکید ویژهٔ پروفسور کرم‌زاده و از طرف ایشان به مطالعهٔ این نوشتار توصیه می‌کنم. به‌نظرم دیدگاه ارائه‌شده از پروفسور کرم‌زاده انقلابی در سبکی از تفکر ریاضی است. متن سخنرانی در چهار قسمت تدوین شده است. هر قسمت با موضوعی جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد که با حل مسئله‌ای مرتبط با آن همراه است. در قسمت اول، سخنران به شیوه‌ای کاملاً ویژه و با استدلال منطقی با حل مسئله‌ای از ترنس تائو[1] برای ما ثابت می‌کند که وظیفهٔ یک معلم چیست. همچنین پیشنهاد ویژه‌ای برای تصمیم‌گیرندگان آموزش ریاضی دارد و با تذکری برای سیاستگذاران آموزش و پرورش همراه است. در قسمت دوم، ساختار بدیعی از هندسه (در واقع نوعی تفکر) توسط سخنران مطرح می‌شود، که با آنچه که تابه‌حال بوده است، متفاوت است. طرز تفکری که انعکاسش می‌تواند خود انقلابی در تاریخ ریاضیات باشد. پروفسور کرم‌زاده در قسمت سوم با اشاره به قضیهٔ دونیمساز و مرور روش‌های گذشته در اثبات آن، اصول حاکم بر آموزش ریاضیات را یادآور می‌شود، اینکه محدود کردن دانش‌آموز به راه‌حل مستقیم (با فرض با معنا بودن آن) بازدارندهٔ آزادی فکر و اندیشه است. در قسمت چهارم با اثبات قضیهٔ مورلی، توسط ایده‌ای که خود پرورانده است، ما را با روش ایده‌پردازی و اثر آن بر فهم ریاضی آشنا می‌کند. اثبات ساده و روانی از این قضیه که یکی از زیباترین قضایای هندسه است شکل می‌گیرد. آنچنان زیبا و لطیف که شایسته است در برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه جای گیرد.

[ایشان چنان مشتاقانه، پرانرژی، با انگیزه و تسلط کامل به ارائهٔ موضوع می‌پردازد و بحث‌ها را به‌زیبایی تمام به‌تصویر می‌کشد که شنوندگانی که حتی از ریاضی بهرهٔ چندانی نگرفته‌اند، به‌موضوع توجه ویژه‌ای داشتند و شاید بیش از همه! این قدرت جذب بی‌نظیر استاد است که من را به نوشتن این متن ترغیب نمود و آنچه را که پیش‌تر از استاد دربارهٔ همگانی کردن ریاضیات خوانده بودم در اینجا به عینه دیدم.

اشتیاق و شور وصف‌ناشدنی پروفسور به آموزش و پاسخ به سؤالات معلمان ریاضی که تا انتهای ایام کنفرانس ادامه داشت، از او یک نقطهٔ همگرایی (به قول عرفا نگینی) در کنفرانس شانزدهم ساخته بود. وجودش در کنفرانس نعمت بی‌بدیلی بود که غنیمت شمرده و چندین‌بار با ایشان هم‌صحبت شدم و ماحصلش مقالهٔ حاضر است. پروفسور خستگی‌ناپذیر در محوطهٔ باز محل برگزاری کنفرانس بر صندلی تکیه زده و بیشتر معلمان و علاقه‌مندان به ایشان، به نوبت، گرد او حلقه زده و سؤالاتشان را مطرح می‌کردند. گرما و شرجی هوا در آن‌وقت سال و خستگی و گرسنگی بر او اثری نداشت. صورتش خیس عرق شده بود ولی با شور و حرارت دربارهٔ موضوع مورد بحث صحبت می‌کرد. چیزی فراتر از عشق به ریاضیات و محبت و علاقه به معلمان ریاضی که بتوان توصیفش کرد! شاید قلم از توصیف آن بازماند و چیزهای دیگری که نمی‌توان گفت! ... دلم نیامد اندکی از شور و حرارتی که در آن جمع درک کرده بودم را با شما درمیان نگذارم.]

[1] Terence Tao

## وظیفهٔ معلم - مسئله‌ای از تائو

پروفسور کرم‌زاده در قسمتی از سخنرانی خود به سیاست‌های نادرست و دوگانهٔ آموزش و پرورش در ترغیب معلمان به کار پژوهشی، اشاره کردند. وظیفهٔ یک معلم، پژوهش علمی در موضوعات جدید ریاضی نیست. وظیفه‌اش می‌تواند واکاوی روش‌های ارائه‌شده در ساختارها و روش‌های اثبات و درک و فهم بهتر از مفاهیم ریاضیات باشد که با نگاه به تاریخچهٔ بسیاری از متون ریاضیات، می‌تواند ایدهٔ سازندهٔ مفاهیم ریاضی را درک کند. این واکاوی از بررسی مقالات ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی تا واکاوی کتاب درسی می‌تواند باشد که اثرات مؤثر و مفیدی در شیوه‌های ارائهٔ موضوع در کلاس درس دارد و می‌تواند موجب این باشد که با تمام انرژی نهفته در درون و با شوق وصف‌ناشدنی به آموزش مفاهیم ریاضیات بپردازد.

ایشان تأکید ویژه‌ای بر نقش معلم داشتند و اشاره کردند که یک معلم ریاضی، مثلاً با حداقل ۱۰ سال سابقهٔ تدریس، می‌تواند یک متخصص آموزش ریاضی باشد. ضرورتی ندارد که تخصص در زمینه‌ای خاص از ریاضیات (حتی در آموزش ریاضی) داشته باشد. در واقع، معلم ریاضی نظریه‌های پرداخته‌شده توسط متخصصین آموزش ریاضی را به اجرا می‌گذارد.

[معلم ریاضی می‌تواند در آموزش ریاضی موفق‌تر عمل کند به‌شرط اینکه بتواند در بین مقالات مختلف آموزش ریاضی کنکاش کند. بتواند از مقالات انتقاد کند. درحقیقت معلمان ریاضی به‌جای پرداختن به موضوعات تخصصی باید بتوانند با توجه به توانایی‌هایشان مقالات ریاضی و آموزش ریاضی را بخوانند، نکاتی که حتی از دید ریاضی‌دانان بزرگ مخفی مانده است را بیابند و آن‌ها را به چالش کشند.]

ناگفته نماند که ایشان به سیاستگذاران آموزشی در آموزش و پرورش توصیه اکید داشتند که از معلم، کار پژوهشی و مقالات تحقیقی نخواهند. در حقیقت واداشتن معلم به‌ارائهٔ مقالات تحقیقی لطمهٔ جدی بر پیکر آموزش ریاضی وارد می‌کند.

[البته اگر در بین معلمان، فردی توانا و باعلاقهٔ وافر به تحقیق علمی باشد و مقالاتی بنویسد، طبیعتاً اشکالی ندارد ولی وظیفهٔ اصلی خود را فراموش نکند. به‌عنوان مثال می‌توان به بزرگانی چون پروفسور فاطمی و پروفسور هشترودی اشاره کرد که کارهای ارزندهٔ آنان و تأثیر به‌سزایی که در آموزش ریاضیات و گسترش آن داشتند، بر کسی پوشیده نیست. درحالی‌که در پی مقالات علمی- پژوهشی نبودند و تأثیرشان بر ساختار ریاضیات بسیار وسیع‌تر از افرادی است که احتمالاً فقط به فکر تألیف مقالات ISI بوده‌اند.]

لازم به‌ذکر است که بخشنامه‌های آموزش و پرورش به‌گونه‌ای است که اگرچه به‌ظاهر، تحقیق و پژوهش برای معلمان اجباری نیست ولی موضوع نظام رتبه‌بندی فرهنگیان و حاشیه‌های مربوط به آن اجبار ناخوشایندی برای فرهنگیان ایجاب می‌کند که عموماً از راه‌های ناصحیح به مقالاتی که لازم دارند دست می‌یابند. ازاین‌رو، برای حل این مشکل لازم است راه‌کارهای مناسبی از طرف انجمن ریاضی استان‌ها، انجمن ریاضی کشور و خانه‌های ریاضیات پیشنهاد گردد و با پیگیری جدی از طرف گروه‌های ریاضی استانی و دبیرخانهٔ ریاضی کشوری و با حمایت مسئولین آموزش و پرورش اجرایی گردد.

همچنین پیشنهاد ویژه‌ای برای تصمیم‌گیرندگان در عرصهٔ آموزش ریاضی داشتند، هم‌چنان‌که مفهوم «حل مسئله»[2] در آموزش ریاضی جا افتاده است و دانشجویان آموزش ریاضی و همهٔ معلمان با راهبردها و رویکردهای آن آشنا هستند، مفهوم دیگری به‌نام «واکاوی اثبات‌ها»[3] در منابع آموزشی ریاضی در دورهٔ کارشناسی و یا دوره‌هایی از آن به‌صورت ضمن خدمت برای معلمان علاقه‌مند توسط متخصصین آموزش ریاضی قرار داده شود.

در ادامه اعلام کردند که بیش از ۹۰ درصد از پژوهش‌ها و مقالاتISI و ... در حوزه ریاضیات بی‌ارزشند. فقط حجم قفسه کتابخانه‌ها را پرکرده‌اند و حداکثر ۱۰ درصد از مقالات هستند که مفیدند و کارساز و می‌توانند تکانی به ریاضیات بدهند! [ایشان فقط به یک عدد اشاره کردند، ولی وقتی در ادامهٔ سخنرانی، تفکرشان از ساختار حاکم بر هندسهٔ اقلیدسی را مطرح نمودند، موجب حیرت اعجازگونه‌ای از قبول این واقعیت شدم. اینکه در کشورمان تعداد مقالات منتشرشده ملاک علمی و اعتبارسنجی محقق و اندیشمندان ما باشد، خود مقوله‌ای است بس طویل که در این مقال نمی‌گنجد.]

پروفسور کرم‌زاده در ادامهٔ سخنرانی خود مصداقی از نظریات خود ارائه کردند. به‌صورت ویژه‌ای با استدلال ریاضی ثابت کردند که وظیفهٔ یک معلم چه باید باشد! همچنین به مسئله‌ای از تائو اشاره کردند.

[ترنس تائو نابغه و ریاضی‌دان چینی‌تبار متولد استرالیا است که به موتزارت ریاضی نیز معروف است. او سه سال پیاپی در المپیاد جهانی

[2] Problem solving [3] Proof checking

ریاضی مدال گرفته است. در ۱۳ سالگی مدال برنز، در ۱۴ سالگی مدال نقره و در ۱۵ سالگی مدال طلای المپیاد جهانی را کسب نمود. او در ۲۴ سالگی به مقام استادی دانشگاه کالیفرنیا در لس آنجلس رسیده است و برندهٔ جایزهٔ فیلدز در سال ۲۰۰۶ و همین‌طور برندهٔ جایزهٔ نقدی ۳ میلیون دلاری است. تائو به توصیهٔ تونی گاردنر[4] سرپرست تیم المپیاد ریاضی انگلستان (همزمان با سرپرستی تیم المپیاد ریاضی ایران توسط پروفسور کرمزاده) کتاب «حل مسائل ریاضی» [۵] را تألیف کرد.] پروفسور یکی از مسائل این کتاب را مورد بررسی قرار داد و به‌صورت زیر به ما نشان داد که نوابغ را هم می‌توان به نقد و چالش کشید.

**مسئله (مسابقهٔ ریاضی استرالیا، ۱۹۸۷): همهٔ جواب‌های صحیح ناصفر معادلهٔ $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{n}{a+b}$ را بیابید، که در آن $a$، $b$ و $a+b$ ناصفرند.**

تائو راه‌حلی از این مسئله ارائه می‌کند که چندان مناسب نیست. حتی در نوشتهٔ خود اشاره می‌کند که روش حل زشتی به‌کار برده است! روش حل تائو را در اینجا بیان می‌کنیم. از معادلهٔ داده‌شده بعد از مرتب کردن نسبت به متغیر مثلاً $a$ خواهیم داشت

$$a^۲+(۲-n)ba+b^۲=۰.,$$

که یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $a$ می‌باشد. جواب‌های آن درصورت وجود به‌صورت زیر است

$$a=\frac{(n-۲)b\pm b\sqrt{n^۲-۴n}}{۲}.$$

برای اینکه $a$ عدد صحیح باشد لازم است که عبارت $n^۲-۴n$ مربع کامل یک عدد حسابی باشد. بنابراین، می‌نویسیم

$$(n-۲)^۲-۴=m^۲,\quad m\in\mathbb{N}\cup\{۰\}.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$(n-۲-m)\times(n-۲+m)=۴,$$

و چون سمت چپ تساوی حاصل ضرب دو عدد صحیح است، با درنظر گرفتن حاصل‌ضرب‌های به‌صورت ۲ × ۲ یا ۱ × ۴ و حل دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی جواب $n=۴$ به‌دست می‌آید.

در این قسمت پروفسورکرمزاده اشاره کردند که اگر تائو یک حقیقت ساده را می‌دانست به‌سادگی می‌توانست این مسئله را ثابت کند و آن حقیقت این است که:

**حاصل‌جمع یک عدد گویا با عکس آن هیچ‌گاه یک عدد صحیح نمی‌شود مگر اینکه آن کسر برابر با یک باشد.**

ایشان این ادعا را به‌صورت زیر ثابت کردند. فرض کنید $\frac{a}{b}$ یک عدد گویای تحویل‌ناپذیر باشد، یعنی $(a,b)=۱$. داریم

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^۲+b^۲}{ab}$$

اگر این عبارت عدد صحیح باشد، آنگاه $a^۲+b^۲$ بر $ab$ بخش‌پذیر است. پس $a^۲+b^۲$ بر $a$ نیز بخش‌پذیر است؛ یعنی

$$a|a^۲+b^۲\Longrightarrow a|b^۲\Longrightarrow a|b,$$

که با توجه به $(a,b)=۱$ امکان ندارد مگر اینکه $a=b=۱$.

در ادامه، راه‌حل پروفسور کرمزاده برای مسئله تائو را دنبال می‌کنیم. ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{(a+b)^۲}{ab}=n\Longrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n-۲.$$

سمت راست رابطهٔ اخیر یک عدد صحیح است و سمت چپ مجموع یک عدد گویا با معکوس آن است و این در صورتی امکان‌پذیر است که $a=b=۱$ که نتیجه می‌دهد $n=۴$.

آقای دکتر کرمزاده از تائو به‌بزرگی یاد کردند و او را موتزارت ریاضی نامیدند. چنین تصوری را برایمان به‌وجود آوردند که اگر ریاضیات را هنر زیبا و خوش‌نقش و نگار ذهن و اندیشه تلقی کنیم، تائو در نواختن آهنگِ ذهن، بی‌نظیر است. این آهنگ بی‌نظیر به‌علت ندانستن نکتهٔ مطرح‌شده از پروفسور کرمزاده یک لحظه از نت خارج شد! چه زیبا و لطیف، پروفسور کرمزاده به شوخی فرمودند که تائو از نت خارج شد و آهنگ زشت نواخت!

[البته بیشتر از آن، با آن شوخی، حرف‌های جدی برای ما معلمان ریاضی داشت که به‌خود بیاییم و از ریاضی‌دانان بزرگ، اگرچه باید به‌بزرگی یاد کنیم، ولی درمیان نوشته‌های آنان نت‌ها را پیدا کنیم، مقالات آنان را به‌چالش بکشیم و موضوعاتی را که از دید آنان مخفی مانده است، هویدا سازیم. شاید کارهای بدیع و نو، در یک رشتهٔ علمی را، مختص افرادی بدانیم که در رأس هرم علمی قرار دارند و اشراف کامل بر موضوع دارند، ولی معلم در هر جا از این هرم علمی قرار داشته باشد، می‌تواند پیمایش معکوس به‌طرف قاعدهٔ هرم داشته باشد و در این پیمایش معکوس با بازنگری بر ساختارهایی که پیش‌تر آموخته است، زوایای پیدا و پنهان آن ساختارها را بر خود معلوم گرداند.]

[4] Tony Gardiner

## قضیهٔ دوشرطی- ساختار هندسهٔ پروفسور کرم‌زاده

پروفسور کرم‌زاده در قسمتی از سخنرانی خود اشاره کردند، اگرچه اقلیدس و همفکرانشان خدمات ارزشمندی در حوزهٔ ریاضیات و هندسه از خود برجای گذاشتند، لیکن قسمتی از مشکلات در حوزهٔ آموزش ریاضی به اقلیدس و طرز تفکر ناشی از مطالعهٔ ساختارهای نهفته در هندسهٔ اقلیدسی برمی‌گردد! رضایت دادن به «اگر ...، آنگاه» به‌جای «اگر و تنها اگر»، میراث اقلیدس است.

مطالب هندسهٔ اقلیدسی اغلب به‌صورت «اگر $p$، آنگاه $q$» ارائه می‌شوند. صورت قضیه بیان شده و بعد اثبات! .... چندان به‌دنبال بررسی عکس قضایا یا ارائهٔ مثال نقض نمی‌باشد. این طرز تفکر ضربهٔ بزرگی بر پیکرهٔ آموزش ریاضی وارد می‌کند. [این طرز تفکر چنان مستولی می‌شود که حتی بزرگان ریاضی هم به‌ندرت می‌توانند یا اراده می‌کنند که برای عکس برخی از قضایای شرطی مثال نقض ارائه کنند. زیرا دست‌پرودهٔ همین ساختار ذهنی «اگر – آنگاهی» بوده‌اند.] ایشان ابراز کردند و چندین‌بار این جمله را تکرار کردند که:

**در ریاضیات (هندسه) قضایایی مهم‌اند که به‌صورت «اگر و تنها اگر» باشند و هر قضیه دیگر هرجا که ارائه شود ارزشی ندارد مگر اینکه:**
**- بررسی شود که آیا همهٔ شرایط موجود در قضیه ضرورت دارد. آیا با شرایط کمتر نتیجه حاصل می‌شود؟ اصلاً چرا با این شرایط؟ اگر قضیه‌ای با تعدادی شرط برقرار نشد، پس بیاییم تعدادی شرط دیگر قرار دهیم تا برقرار شود. خوب این چه ارزشی دارد اگر نتوانیم به حداقل شرایط دست یابیم.**
**- یا اینکه نشان دهیم (با یک مثال نقض یا هر طور دیگر) عکس آن قضیهٔ شرطی برقرار نمی‌باشد.**

[به مطلب جالب توجهی از سخنرانی پروفسور کرم‌زاده (در سی‌وسومین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه فردوسی مشهد) با عنوان «**عکس نتایج را برعکس گذشتگان دریابیم**» اشاره می‌کنم. ایشان ابراز نمودند: در بیشتر زمینه‌های ریاضی نتیجه‌ای خوب و با اهمیت است که به‌شکل «اگر و تنها اگر» باشد و هر دو طرف قضیه اطلاعات تازه‌ای از موجود مورد مطالعه را به‌ما بدهد. عموماً یک طرف قضیه اثبات ساده و طبیعی دارد و طرف دوم آن برای بشر کمتر دیده شده است! ولی اگر قضیه‌ای اثبات بغرنج برای دو طرفش داشت، یعنی اینکه موجودی که به‌طور طبیعی دیده نشده و خود را نشان نمی‌دهد را می‌خواهیم با زور بوجود بیاوریم.

نکتهٔ بسیار جالب‌توجه این است که تغییر ساختار هندسهٔ اقلیدسی به ساختار ارائه‌شده توسط پروفسور کرم‌زاده امکان‌پذیر است. در صحبتی که با ایشان در خارج از سالن کنفرانس داشتم، ابراز داشتند که اگر ۱۰۰ نفر معلم (یا دانشجوی) با انگیزه، توانا و پرانرژی در اختیارم قرار می‌دادند، با تشکیل ۲۰ گروه ۵ نفره در مدت چند سال می‌توانستیم کل ساختار هندسه اقلیدسی را کاملاً تغییر دهیم.

بدین‌گونه که از ساختار شرطی به دو شرطی یا ساختار دیگری که طرز تفکر «**اگر** $p$، **آنگاه چه**» را القا می‌کند، تغییر خواهیم داد! (اجازه دهید چنین ساختاری را **ساختار هندسهٔ پروفسور کرم‌زاده** بنامیم) البته ممکن است خوانندهٔ متن (با طرز تفکر اگر- آنگاهی) بگوید «چه» چه معنایی دارد؟ ولی فرد آشنا با طرز تفکر پروفسور کرم‌زاده می‌گوید «چه» در این طرز تفکر یعنی:

- چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟
- چه نتایج دیگری هم می‌تواند حاصل شود؟
- چه چیزی نتیجه نمی‌شود؟
- نتایج چگونه به‌دست می‌آیند؟
- چه نتایجی در آینده قرار است به‌دست آید؟ آیا این سؤال پارادوکس است؟
- آیا نتیجه به‌دست آمده با $p$ معادل است؟ درغیراین‌صورت، چه چیزهای دیگری بیافزاییم تا با $p$ معادل شود. ابداع این تفکر توسط پروفسور کرم‌زاده یک انقلاب و یا شاهکاری در هندسه و در تاریخ ریاضیات خواهد بود.]

خوب با این نوع از تفکر ریاضی دیگر از حجم عظیم قضایای ریاضی چیز زیادی نمی‌ماند. اگر با این طرز تفکر قرار باشد مقالات ریاضی تدوین شوند، سرعت مقاله‌نویسی به‌شدت کاهش می‌یابد و اگر قرار باشد که ویراستارها فقط چنین مقالاتی را بپذیرند تعداد مقالات چاپ‌شده به یک‌هزارم آن کاهش می‌یابد.

به‌نظر می‌رسد ایده‌های ناب در ریاضیات بدین‌گونه (اگر و تنها اگر) شکل می‌گیرند. پروفسور کرم‌زاده در ادامه، حدسی ازفرما را مطرح کردند. فرما با محاسبهٔ چهار جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = ۲^{۲^n} + ۱$ که به ترتیب ۵, ۱۷, ۲۵۷, ۶۵۵۳۷ هستند. حدس زد که همهٔ جملات دنباله، اعداد اول هستند. اویلر نشان داد که این حدس اشتباه است و

جمله پنجم دنباله بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. حال سؤال اینجاست که آیا اویلر همه عامل‌های اول را برای عدد $2^{32}+1$ بررسی کرد و به عدد ۶۴۱ رسید؟ کوشش‌های اویلر منتج به یک قضیه دوشرطی بود که عنوان می‌کند:

**هر عدد طبیعی به فرم $4n+1$ اول است اگر و تنها اگر فقط به یک صورت به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی (صرف‌نظر از ترتیب جمعوندها) نوشته شود.**

[شاید ایدهٔ سازندهٔ این قضیه بدین‌گونه بوده باشد: دو عدد $m = a^2+b^2$ و $n = c^2+d^2$ را که به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی‌اند درنظر بگیرید. با توجه به اتحاد

$$(a^2+b^2)\times(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2,$$

حاصل‌ضرب $m \cdot n$ به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی خواهد بود: $mn = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$. با تغییر ترتیب جمعوندها در $n$ (یا $m$ ) خواهیم داشت

$$mn = (a^2+b^2)\times(d^2+c^2) = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2,$$

که نشان می‌دهد حاصل‌ضرب $mn$ به دوشکل، به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشته می‌شود. شاید اویلر از اینکه $mn$ اول نیست و نمایش یکتایی به‌صورت مجموع دو مربع طبیعی ندارد به حدس خود در مورد این قضیه دست یافته باشد (مثلاً حاصل‌ضرب دو عدد اول $2^2+3^2=13$ و $2^2+5^2=29$ با استفاده از اتحاد اشاره‌شده و با تغییر ترتیب جمعوندها، به‌صورت $4^2+19^2$ یا $11^2+16^2$ نوشته می‌شود). به‌راحتی می‌توان نشان داد که : هر عدد اول غیر از ۲ که به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی باشد به‌فرم $4n+1$ خواهد بود (کافی است به پیمانه ۴ همهٔ حالت‌های مجموع مربعات آن دو عدد طبیعی را بررسی کنیم) اثباتی در حد متوسطه برای طرف دوم قضیهٔ اویلر (اعداد اول به شکل $4n+1$ قابل نمایش به‌صورت مجموع دو مربع طبیعی هستند و نمایش مزبور غیر از ترتیب جمعوندها، یکتاست) در مجلهٔ آموزش ریاضی سال ۱۳۷۹شماره ۵۷ از دکتر محمدرضا پورنکی بیان شده است. همچنین امیل بورل در فصل پنجم کتاب عددهای اول (ترجمه پرویز شهریاری) به اثبات ساده‌ای از آن اشاره می‌کند. بیشتر از این، در فصل دوازدهم کتاب نظریهٔ مقدماتی اعداد دیوید ام برتن[۵] (ترجمهٔ محمد صادق منتخب) تاریخچه و توضیح کامل‌تری از آن وجود دارد. سایر اثبات‌ها قدری پیچیده‌اند. اویلر نشان داد که عدد $2^{32}+1$ به دو صورت مختلف با مجموع مربعات دو عدد طبیعی برابراست، لذا با توجه به قضیهٔ اشاره‌شده، اول نمی‌باشد.

در مثالی دیگر (برگرفته از سخنرانی پروفسور کرم‌زاده در خانهٔ ریاضیات اصفهان در سال ۱۳۹۲) می‌توان به کوشش‌های منتهی‌شده به اثبات قضیهٔ آخر فرما توسط اندرو وایلز[۶] اشاره کرد. اینکه فرما در حل مسئلهٔ معروف خود، درحقیقت به‌دنبال مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای بوده که اضلاع آن اعداد صحیح باشند و مساحت آن مربع کامل یا دو برابر یک مربع کامل باشد. فرما در ابتدا مسئله دو شرطی زیر را ثابت کرد:

«معادلهٔ $x^4+y^4=z^2$ جواب صحیح نابدیهی دارد اگر و تنها اگر دستگاه

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ \frac{1}{2}xy=t^2 \end{cases}$$

جواب صحیح نابدیهی داشته باشد.»

بنابراین، فرما معادلهٔ قبلی را رها کرد و روی دستگاه معادلات جدید تمرکز کرده و نشان داد که دستگاه جواب صحیح نابدیهی ندارد. درنتیجه، معادلهٔ $x^4+y^4=z^2$ نیز جواب صحیح نابدیهی نخواهد داشت. واضح است که از عدم وجود جواب برای آن، معادلهٔ $x^4+y^4=z^4$ نیز جواب نابدیهی نخواهد داشت. فرما تا اینجا به‌خوبی پیش رفته بود، ولی احتمالاً جای تمرکز روی گسترش قضیهٔ دوشرطی و صورت‌های معادل با آن، از عدم وجود جواب نابدیهی برای توان‌های ۳ و ۴ به فکر تعمیم مسئله برای توان $n$ بوده است. در ادامهٔ این مسیر طولانی وایلز و همکارانش در گسترش ایدهٔ فرما، دنبال مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع گویا بودند که مساحتش عدد صحیحی باشد و در ادامه توانستند وجود چنین مثلث‌های را با وجود نقاط گویا روی خم بیضوی خاصی مرتبط کنند.]

## قضیهٔ دو نیمساز ـ اثبات مستقیم

پروفسور کرم‌زاده در قسمتی از سخنرانی خود به قضیهٔ دو نیمساز اشاره کردند. پیش از آن، از دونالد کاکستر[۷]، از بزرگان هندسه، نام بردند. اشاره کردند که بزرگان ریاضی همچون یاکوب اشتاینر[۸] و کاکستر و ... اشتباهاتی دارند. کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه» از کاکستر را پیش‌تر دیده بودم. انتظار اشتباه از کاکستر یا اشتینر و ... غیرمنتظره بود! اهمیت قضیهٔ دونیمساز برایمان روشن است. داستان

[5] David M. Burton [6] Andrew Wiles [7] Donald Coxeter [8] Jakob Steiner [9] Daniel Christian Ludolph Lehmus

از این قرار است که نخستین بار ریاضی‌دانی به نام لموس[۹] در سال ۱۸۴۰ قضیهٔ دونیمساز را به‌صورت زیر مطرح می‌کند:

**در یک مثلث دو نیمساز داخلی برابرند اگر و تنها اگر مثلث متساوی الساقین باشد.**

یک طرف قضیه اثبات ساده‌ای دارد، ولی از اثبات طرف دوم آن عاجز می‌ماند و از اشتاینر سوئیسی کمک می‌خواهد. اشتاینر هم راه‌حل پیچیده‌ای به‌روش تناقضی (برهان خلف) ارائه می‌کند. از آن روز به‌بعد کوشش‌های فراوانی توسط ریاضی‌دانان بزرگی صورت گرفت تا راه‌حل ساده (و البته روش مستقیمی) برای آن بیابند. حدود ۱۷۰ سال تلاش و راه‌حل‌های متفاوتی برای آن ارائه شده است، تا اینکه روش حل ساده‌ای که پروفسور کرم‌زاده اشاره می‌کند. [تا این‌جا چندان متوجه نبودیم چه اشتباهی صورت گرفته، تا اینکه پروفسور از جمع پرسیدند: اصلاً روش اثبات مستقیم یعنی چه؟ آیا تعریف مشخصی از روش اثبات مستقیم داریم؟ این همه تلاش صورت گرفته است تا راه‌حل مستقیم برای مسائلی از این دست پیدا شود. آیا امکان‌پذیر است؟

پروفسور کرم‌زاده در ادامه افزودند: اصولاً بیان اینکه برای یک مسئله راه‌حل مستقیم ارائه شود، و چنین محدودیتی در روش حل قرار داده شود اشتباه است! کاری است عبث و بیهوده! ریاضی آزادی فکر و اندیشه است. افکار و اندیشه‌های یک جوان و یک دانش‌آموز را نباید محدود کرد که حتماً چنین روشی را به‌کار برد، آن‌هم زمانی که هنوز تعریف مشخصی از روش مستقیم ارائه نشده باشد. به‌نظر می‌رسد که در گذشته ریاضی‌دانان بزرگ در مبارزه‌طلبی از رقیب که راه‌حل تناقضی ارائه می‌کردند، می‌گفتند: اگر می‌توانید راه‌حل مستقیمی برای آن ارائه کنید. یک مبارزه‌طلبی ناجوانمردانه! چنین بازدارندگی در روش حل مسئله، برخلاف اصول آموزش ریاضی است. نکته‌ای است بس ظریف که از نگاه بسیاری از ریاضی‌دانان یا متخصصین آموزش ریاضی مخفی مانده بود.

[اثبات هرکدام از قضایا نیاز به اثبات مسائل و قضایای ساده‌تری دارند. هرگاه یکی از آن قضایا به روش برهان خلف اثبات شده باشد. در اثبات قضایای بعدی نیز به نوعی اثبات غیرمستقیم دخالت دارد و مسلماً تلاش برای ارائه حل مستقیم معنایی نخواهد داشت.] ایشان در تعریف روش اثبات مستقیم اشاره کردند، اثبات مستقیم اثباتی است که فقط از اصول استفاده شده باشد و هر قضیه‌ای که در اثبات به آن ارجاع شده باشد نیز با استفاده از اصول نتیجه شده باشد و روش تناقضی در کار نباشد.

پروفسور به یک راه‌حل از این قضیه اشاره کردند که به‌نظر می‌رسد ساده‌ترین راه‌حلی است که تاکنون ارائه شده است. اثباتی بسیار زیبا و دلپذیر که جا دارد در برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه جای گیرد. کافی است در ابتدا مسئله زیر را ثابت کنیم.

**مسئله: در هر مثلثی که دو زاویه نابرابر داشته باشد، نیمساز زاویه بزرگ‌تر، از نیمساز زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است.**

حل این مسئله در مجلهٔ برهان ریاضی، شمارهٔ ۸، اردیبهشت ۹۶ آمده است. با حل این مسئله، اثبات قسمت دوم قضیهٔ دو نیمساز بسیار ساده می‌شود؛ دو زاویهٔ نابرابر در مثلث، دو نیمساز نابرابر را نتیجه می‌دهد. پس دو نیمساز برابر در یک مثلث، دو زاویه برابر را نتیجه می‌دهد.

## دانستن یا ایده‌پردازی؟ قضیهٔ مورلی

درقسمت چهارم و پایانی، ایده‌پردازی و اثر آن در فهم ریاضی و راه‌کارهای اثبات ارائه می‌شود. پروفسور کرم‌زاده در شروع سخنرانی، مجری توانای برنامه را باهوش می‌خواند، در انتهای سخنرانی‌اش متوجه شدم که نامیدن این لقب برای مجری برنامه نشانه ذکاوت فوق‌العاده خودشان است!

پروفسور کرم‌زاده در قسمتی از سخنرانی خود به موضوع اندوخته‌های معلم اشاره می‌کند. یک معلم ضرورتی ندارد اطلاعات وسیعی در یک حوزهٔ علمی داشته باشد؛ اصلاً چنین دانشی برایش کارساز نیست. مباحث ریاضی دهان پرکنی چون توپولوژی، حلقه، آنالیز تابعی و... بدون درک ساختارهای اولیهٔ آن‌ها ارزشی ندارند. هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال پایه این ساختارها هستند. دانستن هندسه یعنی فهم همان ساختارهای درون هندسه و .... اگر معلم به چنین دانشی دست یابد، چندان فرقی بین معلم و اساتید دانشگاه (محقق) نخواهد بود.

[شاید ذهنمان به موضوعی عادت کرده باشد و فقط دانش آن را داشته باشیم ولی این نوع دانش ارزشی ندارد مگر اینکه فهمی از ساختارهای درونی آن یا قدرت ایده‌پردازی در آن موضوع داشته باشیم!]

بهتر است با مثال موضوع را دنبال کنیم:

**«نیمساز داخلی یک زاویه، مکان هندسی نقاطی از درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.»**

تاکنون درمورد وضعیت کلی‌تری از این خاصیت فکری و یا ایده‌ای نداشته‌ایم!! آیا تعمیمی وجود دارد؟ نیمساز چه ایده جدیدی می‌تواند داشته باشد؟ این موضوع با افکار پیچیدهٔ پروفسور نشان از ارائه مطلب مهمی از طرف ایشان بود. بله! پروفسور در انتهای سخنرانی‌اش اشاره‌ای به قضیهٔ مورلی به‌صورت زیر دارد:

**«در هر مثلث از تقاطع خطوطی که هر زاویهٔ راس را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند (خطوط کنار هم)، مثلثی حادث می‌شود که متساوی‌الاضلاع است».**

[فرانک مورلی[۱۰] ریاضی‌دان انگلیسی بود که نامش با قضیهٔ مورلی از هندسهٔ مسطحه عجین شده است. قضیه مورلی بیان می‌کند: اگر مثلث دلخواهی را در نظر بگیریم و بعد هر سه زاویه آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و خطوط مقسم این زوایا را امتداد دهیم تا در درون مثلث اول، مثلثی حادث شود، مثلث ایجادشده متساوی‌الاضلاع است. اثبات‌های مختلفی از این قضیهٔ بسیار زیبا در ۱۲۰ سال اخیر ارائه شده است. تلاش‌های زیادی برای یافتن راه‌حل ساده‌ای در حد دورهٔ متوسطه، ریاضی‌دانان بزرگی را به‌خود مشغول کرده است. شاید حس زیبای وصف‌ناشدنی قضیهٔ مورلی عامل این‌همه علاقه‌مندی باشد. یافتن اثبات‌های پیشین چندان مشکل نیست؛ کافی است در گوگل جست‌وجو کنید. از اثبات آلن کن[۱۱] برنده مدال فیلدز که با استفاده از اعداد مختلط صورت گرفته است تا اثبات ابتکاری جان هارتون کانوی[۱۲]. کانوی، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی این اواخر، اثباتی از قضیهٔ مورلی ارائه کرده که مدعی شده است «ساده‌ترین اثبات موجود از قضیهٔ مورلی است». ریاضی‌دان دیگری به نام الن جی. کین[۱۳] در مقاله‌ای مدعی شد که اثبات کانوی، اثباتی خلق‌الساعه است. (یعنی اینکه به یک‌باره بدون هیچ ردپایی، تو گویی به یک‌باره از هیچ پدید آمده است) و این را به‌جهت زیباشناسی، نقصی بر اثبات کانوی می‌داند. ظاهراً نظرش این است که هر آنچه که ساده و طبیعی به ذهن متبادر شود، زیبا است. پروفسور کرم‌زاده در مقاله‌ای که در انتهای متن آمده است و پاسخی هوشمندانه به کین است، اشاره می‌کند که اثبات کانوی هرچند بسیار زیرکانه، خلق‌الساعه نیست و ریشه در بعضی تعاملات کاملاً طبیعی دارد و سپس می‌کوشد تا اثبات کانوی را ساده کند و به‌خوبی با قضیه‌ای که خود ساخته است، اثباتی به‌مراتب ساده‌تر و خود بنیادتر از اثبات کانوی ارائه می‌کند.

قضیه مورلی در ابتدای پیدایش هندسهٔ اقلیدسی می‌توانست مطرح شود! حال سؤال این است که چرا ۲۰۰۰ سال از آن غفلت شده است؟ چرا ایده‌های همچون ایده پروفسور کرم‌زاده باید ۲۰۰۰ سال مخفی بماند؟ آیا محققین آموزش ریاضی قبل از آن می‌توانستند معلمان ریاضی را و آن‌ها نیز دانش‌آموزان را برای خلق چنین ایده‌هایی آموزش دهند؟ شاید یک پاسخ (نه چندان محکم) این باشد که مشکل تثلیث زاویه به کمک خط‌کش نامدرج و پرگار دلیلی بر عدم پرداختن و ساختن چنین ایده‌هایی باشد. اینکه مسائل نیمساز زاویه فراوان هستند ولی تثلیث‌گر چندان شناخته شده نیست.] روش اثبات پروفسور کرم‌زاده در یک ایدهٔ ابتکاری پیاده‌سازی می‌شود. به‌نظر می‌رسد ایدهٔ ایشان بدین‌گونه شکل گرفته باشد: وقتی به تثلیث زاویه در قضیهٔ مورلی توجه می‌کنیم، می‌بینیم که هر خط درون زاویه، یک نیمساز از زاویه کوچکتر است که درون آن قرار گرفته است. پس ایشان دنبال خاصیت جدیدی از نیمساز زاویه می‌گردد، تا بتواند از آن در اثبات قضیهٔ مورلی استفاده کند. پروفسور قضیه‌ای را مطرح می‌کند که یک شرط لازم و کافی برای نقاط روی نیمساز زاویه ارائه می‌کند که می‌توان به‌نوعی آن را تعمیم‌یافتهٔ خاصیت نیمساز دانست. پروفسور قضیهٔ زیر را مطرح کرد.

**قضیهٔ نیمساز پروفسور کرم‌زاده: اگر نقطهٔ $A$ درون زاویهٔ $xoy$ باشد و نقاط $B$ و $C$ به‌ترتیب نقاطی بر اضلاع $Ox$ و $Oy$ باشند، آنگاه هر دو گزاره از سه گزارهٔ زیر، سومی را نتیجه می‌دهد:**
**(۱) نقطهٔ $A$ روی نیمساز زاویه قرار دارد؛**
**(۲)** $AB = AC$؛
**(۳) زوایای $\angle OCA$ و $\angle OBA$ مساوی‌اند یا مکمل هم هستند.**

این قضیه در عین ابتکاری بودنش، اثبات ساده‌ای دارد. کافی است حالت همنهشتی (ض‌زض) و حالت (زض‌ز) دو مثلث به‌کار رود (مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴] را ببینید) و حتی برای دانش‌آموز دورهٔ متوسطهٔ اول قابل فهم است.

زمان جلسه مدتی است پایان یافته است. مجری باهوشِ ماجرا خود را به تکاپو می‌اندازد که زمان را به پروفسور اعلام کند. ولی مگر می‌تواند در مقابل اشتیاق بی‌اندازهٔ پروفسور برای ادامهٔ سخنرانی‌اش

[10] Feank Morley [11] Alain Connes [12] John Horton Conway [13] Alan J. Cain

(آن هم قضیهٔ مورد علاقه‌اش مورلی) حرفی برای گفتن داشته باشد. در مقابل ذکاوت و اشتیاق پروفسور، تسلیم می‌شود و پروفسور خستگی‌ناپذیر به‌سادگی اثبات آن، با ایده‌ای که خود پرورانده است اشاره می‌کند. ایشان شرط لازم و کافی از مسئله‌ای را که خود ساخته است به‌کار می‌برد تا یک اثبات ساده و روان از متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ساخته‌شده در قضیهٔ مورلی شکل گیرد.

## سخن پایانی

پروفسور کرم‌زاده در انتهای سخنرانی اعلام می‌نماید، عنوان آخرین سخنرانی‌ام که شاید در ۸۰ سالگی باشد (با آرزوی سلامتی برای ایشان) به‌صورت « **بالاخره، ریاضی چیست و ریاضی‌دان کیست؟**» خواهد بود. سخنرانی‌ای که در آینده ارائه خواهند داد، اگرچه دانستن آخرینی ـ‌که بعدی نباشد‌ـ چندان برایمان خوشایند نیست. لاجرم آخرینی که بی‌شک برترین است، مؤثرترین نیز هست. تشویق حاضران نشان از آن بود که از پروفسور چه می‌خواهند! پاسخ به سؤالی که جهانی از فلسفه را بر پشتش دارد! گام‌های بلند پروفسور کرم‌زاده در همگانی کردن ریاضیات و شرح و شفاف‌سازی آن، برای ریاضی‌خوانان (دانش‌آموزان، دانشجویان و معلمان ریاضی) و حتی برای ریاضی‌دانان ستودنی است. مقالات و سخنرانی‌های ایشان راهگشای مسائلی است که راه توسعه و عمومی کردن ریاضیات را مسدود کرده‌اند و برای دوست‌داران ریاضیات که فراتر از عشق زمینی با علاقه‌مندی بیشتر به آن بپردازند، اثربخش و امیددهنده است. عشق و علاقه وافر ایشان به ریاضیات میراثی است که به همه خوانندگان و شنوندگان سخنرانی خود تقدیم می‌دارد.

[1] I. Gorjian, O.A.S. Karamzadeh, M. Namdari, *Morley's theorem is no longer mysterious*, The Mathematical Intelligencer 37 (2015) 6–7.

[2] O.A.S. Karamzadeh, Is John Conway's proof of Morley's theorem the simplest and free of a deus ex machina?, *The Mathematical Intelligencer* 36 (2014) 4–7.

[3] O.A.S. Karamzadeh, *A very elementary short and self contained proof of Conway's little theorem*, The mathematical Gazette 102 (2018) 496–497.

[4] C. Pincock, *Mathematics and Explanation (Elements in the Philosophy of Mathematics)*, Cambridge: Cambridge University Press, 2023.

[5] T. Tao, *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*, Oxford University Press, 2018.

* دبیر ریاضی استان مازندران، آمل