نوشته‌ها

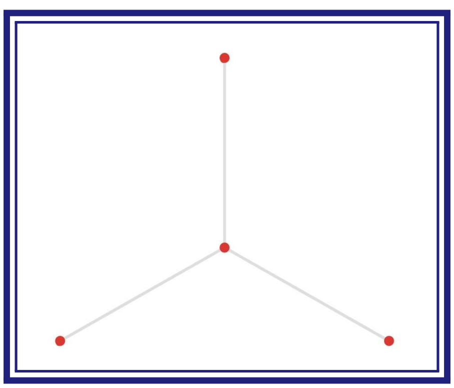
در شبکه‌های بسیار همبند، همیشه یک دور هامیلتونی وجود دارد *

لیلا اسلومن

مترجم: سعید علیخانی **

چکیده: ریاضی‌دانان نشان می‌دهند که گراف‌هایی از یک نوع معمولی خاص باید حاوی مسیری باشند که دقیقاً یک‌بار از هر رأس بازدید می‌کند.

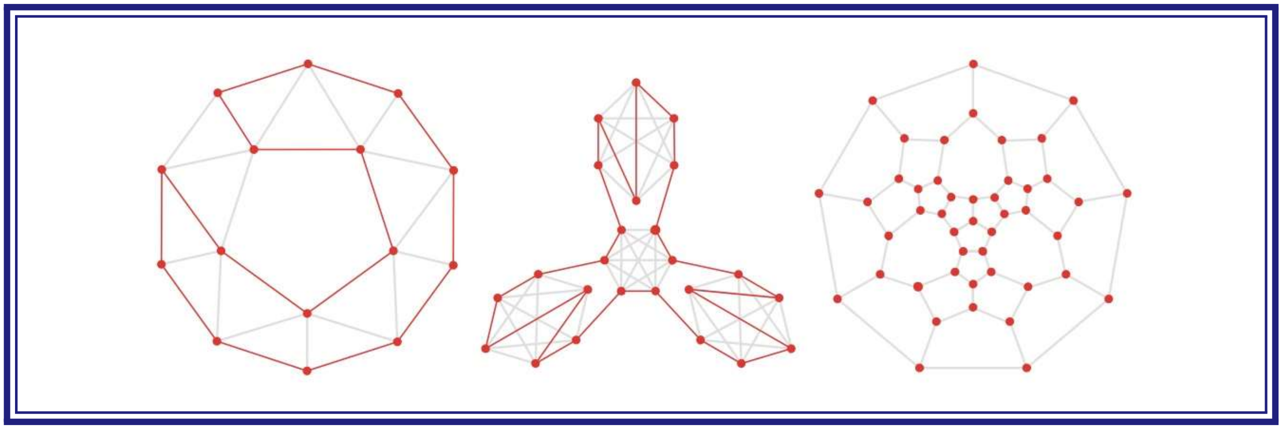
همان‌گونه که انتزاعات ریاضی پیش می‌روند، گراف‌ها از ساده‌ترین‌ها هستند. دسته‌ای از نقاط را در یک صفحه پراکنده کنید. برخی از آن‌ها را با خطوط به‌هم وصل کنید. این، یک گراف است و با این حال فوق‌العاده قدرتمند هستند. از آن‌ها می‌توان برای حمله به طیف گسترده‌ای از مسائل، از مدل‌سازی عصب‌های مغز گرفته تا مسیریابی کامیون‌های تحویل در جاده‌ها استفاده کرد. در ریاضیات، می‌توان از آن‌ها برای دسته‌بندی اشیای جبری مهم به‌نام گروه، برای توصیف گره‌ها و به روش‌های بی‌شمار دیگر استفاده کرد. یکی از مسائل اصلی در نظریهٔ گراف، یافتن مسیرهایی است که پیش از بازگشت به نقطه شروع، دقیقاً یک‌بار از هر نقطه در گراف بازدید می‌کنند. این مسیرها به نام ویلیام روآن همیلتون، ریاضی‌دان قرن نوزدهم، دورهای همیلتونی نامیده می‌شوند. بسیاری از گراف‌ها دارای چنین دورهایی هستند. اما در برخی دیگر، مهم نیست که چقدر برای یافتن یک دور همیلتونی تلاش کنید، در نهایت گیر خواهید کرد: شاید در یک حباب جداشده از گراف گیر بیفتید، بدون اینکه راهی برای بازدید از همهٔ نقاط وجود داشته باشید، یا شاید مجبور شوید مراحل خود را دوباره دنبال کنید.



شکل ۱: **گراف** $K_{1,3}$

برای گراف‌های کوچک، مانند گراف $K_{1,3}$، تشخیص وجود دور همیلتونی با آزمون‌وخطا نسبتاً آسان است. در این مورد، این‌طور

نیست. اما اگر شروع به بررسی گراف‌هایی با صدها، هزاران یا میلیون‌ها نقطه و یال کنید، این کار بسیار دشوار می‌شود. هیچ الگوریتم کارآمد شناخته‌شده‌ای برای تعیین اینکه آیا یک گراف بزرگ داده‌شده حاوی یک دور همیلتونی است یا خیر، وجود ندارد. اگر کسی چنین الگوریتمی را پیدا کند، راه‌حل‌هایی برای مجموعهٔ وسیعی از مسائل در ریاضیات و علوم کامپیوتر ایجاد می‌کند (چنین الگوریتمی همچنین یکی از شش مسئلهٔ باقیمانده جایزهٔ هزاره را حل می‌کند که یک میلیون دلار از مؤسسه ریاضیات کِلِی به‌دست می‌آورد).



دورهای همیلتونی در چند گراف

بنابراین، برخی از ریاضی‌دانان به‌جای تلاش برای تولید یک الگوریتم کلی برای یافتن دورهای همیلتونی، روی مسائل ساده‌تر اثبات اینکه انواع خاصی از گراف‌ها حاوی چنین دورهایی هستند، تمرکز کرده‌اند. در سال ۲۰۰۲، مایکل کریولویچ[1] از دانشگاه تل آویو و بنی سوداکوف[2]، که اکنون در مؤسسه فناوری فدرال سوئیس زوریخ هستند، حدس زدند که دستهٔ مهمی از گراف‌ها به نام گراف‌های بسط‌دهنده[3] همگی شامل دورهای همیلتونی هستند. در ماه فوریه، به‌همراه چهار ریاضی‌دان دیگر، سوداکوف موفق شد حدسی را که برای نخستین‌بار بیش از دو دهه پیش از آن مطرح کرده بود، اثبات کند.

در جست‌وجوی دورها

حدس کریولویچ و سوداکوف مجموعهٔ زیادی از تلاش‌ها را برای گشودن شرایطی که دور همیلتونی را تضمین می‌کنند، نشان می‌دهد. در سال ۱۹۵۲، گابریل دیراک، ریاضی‌دان دانمارکی (و پسرخواندهٔ فیزیک‌دان معروف پل دیراک)، ثابت کرد که هر گراف با n راس یا گره، که در آن هر گره دست‌کم به $n/۲$ گرهٔ دیگر متصل است، دارای یک دور همیلتونی است. اما این تعداد زیادی یال است. در طول سال‌ها، ریاضی‌دانان تلاش کردند تا تعداد یال‌هایی را که گراف‌های همیلتونی باید داشته باشند، کاهش دهند. در سال ۱۹۷۶، ریاضی‌دان مجارستانی لایوس پوسا[4] ثابت کرد که گراف‌های خاصی که با رسم تصادفی یال‌ها ساخته می شوند، تقریباً دارای دورهای همیلتونی هستند. تا سال ۲۰۰۱، کریولویچ و سوداکوف، همراه با دو همکار دیگر، و همچنین یک گروه رقیب دیگر، نتایج مشابهی را در مورد کلاس متفاوتی از گراف‌ها به اثبات رساندند.

کریولویچ و سوداکوف فکر می‌کردند که می‌دانند چرا گراف‌هایی که به‌طور تصادفی ساخته شده‌اند، احتمالاً حاوی یک دور همیلتونی هستند. گراف‌های تصادفی دو ویژگی کلیدی دارند. نخستین ویژگی مربوط به این است که اگر دو گروه بزرگ و بدون همپوشانی از گره‌ها را در گراف‌ها بررسی کنید، چه اتفاقی می‌افتد. در یک گراف تصادفی، به احتمال زیاد دست‌کم یک یال وجود دارد که گروه‌ها را به‌هم متصل می‌کند. ویژگی دوم شامل گروه‌های کوچکی از گره‌ها می‌شود. یک گروه کوچک از گره‌ها را بردارید و آن را A نام‌گذاری کنید. اکنون با اضافه کردن هر گره‌ای که به چیزی در A متصل است، آن را بزرگ کنید. ریاضی‌دانان این گروه بزرگ‌تر را «همسایگی A» می‌نامند.

[1] Michael Krivelevich [2] Benny Sudakov [3] expander graphs [4] Lajos Pósa

در گراف‌های تصادفی، همسایگی A، احتمالاً بسیار بزرگ‌تر از خود A است، بنابراین، ریاضی‌دانان می‌گویند که A به یک محلهٔ بزرگ «گسترش» می‌یابد. گراف‌هایی با این دو ویژگی که در آن گروه‌های بزرگی از گره‌ها احتمالاً یک یال مشترک دارند و گروه‌های کوچکی از گره‌ها به گروه‌های بسیار بزرگ‌تری گسترش می‌یابند، گراف های بسطدهنده نامیده می‌شوند. اگر همسایگی A به اندازهٔ c برابر از A بزرگ‌تر باشد، گراف را c-بسطدهنده می‌نامند. اگرچه بسیاری از گراف‌های تصادفی در نهایت بسطدهنده هستند، بسط دهنده‌ها نباید تصادفی باشند. تام گور[۵] از دانشگاه کمبریج گفت، در عوض، یک بسطدهنده «خواص یک گراف تصادفی را بدون نیاز به تصادفی دارد».

به‌دلیل شرایطی که باید برآورده شوند، گراف‌های بسطدهندهٔ بسیار به‌هم مرتبط هستند، به‌این معنی که می‌توانید در گام‌های نسبتاً کمی از یک قسمت گراف به قسمت دیگر بروید، حتی زمانی که یال‌های زیادی وجود ندارد. گور گفت که توسعه‌دهندگان تنش بین اتصال و پراکندگی را آشکار می‌کنند. کارهای اولیه روی گراف‌های بسطدهنده از شبکه‌های عصبی الهام گرفته شده بود و گراف‌ها در حوزه‌های دیگر نیز خود را نشان داده است. برخی از شبکه‌های اجتماعی بزرگ برخط توسعه‌دهنده هستند و می‌توان از بسطدهنده‌ها برای ساخت کدهای تصحیح خطای کارآمد و بهبود دقت الگوریتم‌های تصادفی استفاده کرد. کریولویچ و سوداکوف در مقالهٔ خود در سال ۲۰۰۲ ثابت کردند که انواع خاصی از بسطدهنده‌ها دارای دورهای هامیلتونی هستند. آن‌ها فکر می‌کردند که بسطدهنده‌ها به‌طور کلی چنین دورهایی نیز دارند، اما نتوانستند آن را ثابت کنند. کریولویچ گفت: «ما کاملاً معتقد بودیم که حدس باید درست باشد، و همچنین کاملاً معتقد بودیم که [اثبات] حدس بسیار بسیار سخت خواهد بود.

در طی دو دهه بعد، سوداکوف گه‌گاه به این مسئله بازگشت، اما پیشرفت چندانی نداشت. این در مارس ۲۰۲۳ تغییر کرد، زمانی که سوداکوف، شاگردش دیوید مونها کوریا،[۶] و استفان گلاک[۷] از دانشگاه پاسائو نتایج سال ۲۰۰۲ را بهبود بخشیدند و نشان دادند که یک کلاس کمی بزرگتر از گراف‌های بسطدهنده باید دارای دور هامیلتونی باشند. سوداکوف گفت: «ما ایده‌های زیادی تولید کردیم و در مقطعی متوجه شدیم که می‌توان آن‌ها را به‌روشی درست ترکیب کرد. دیوید و استفان همیشه در مورد این مسئله بسیار مشتاق بودند و حاضر به تسلیم‌شدن نبودند. ماه بعد، ریچارد مونتگومری[۸] از دانشگاه وارویک و الکسی پوکروفسکی[۹] از دانشگاه کالج لندن برای ملاقات سوداکوف به زوریخ آمدند. مونتگومری سعی کرده بود حدس سوداکوف و کریولویچ را به‌عنوان بخشی از دکترای خود در کمبریج در اوایل دههٔ ۲۰۱۰ ثابت کند، اما از این کار منصرف شد، زیرا فکر می کرد ابزار مناسبی برای مقابله با این مسئله ندارد. با پیشرفت اخیر سوداکوف، مونها کوریا و گلوک، مونتگومری فکر کرد که تلاش دیگری ارزشمند خواهد بود. مونتگومری گفت: «من پیشنهاد کردم که روی این موضوع کار کنیم، بدون اینکه لزوماً هیچ حس قوی‌ای داشته باشیم که پیشرفت چشمگیری داشته باشیم.»

طی چند هفتهٔ آینده، مونتگومری، سوداکوف و پوکروفسکی یک استراتژی ارائه کردند. آن‌ها از روشی به نام چرخش پوزا[۱۰] برای جمع‌آوری مجموعه‌ای از مسیرهای طولانی استفاده کردند و امیدوار بودند که در نهایت این مسیرها را به یک دور همیلتونی متصل کنند. مونتگومری بدون مدرک، اما با خوش‌بینی تازه به خانه خود در وارویک بازگشت. سوداکوف گفت: «ما این احساس را داشتیم که در نهایت، به هر طریقی، باید ایده‌های درستی برای رسیدن به نتیجه داشته باشیم.» نزدیک به پایان سال ۲۰۲۳، مونها کوریا [۱۱] و نمانیا دراگانیچ[۱۲] یکی از دانشجویان سوداکوف که اخیراً دانش‌آموخته شده‌اند، به سوداکوف گفتند که آن‌ها نیز روی این حدس کار می‌کردند. مونها کوریا و دراگانیک ایده‌ای برای اتصال مسیرها به دور همیلتونی با استفاده از ابزاری به‌نام شبکهٔ مرتب‌سازی داشتند

[5] Tom Gur [6] David Munhá Correia [7] Stefan Glock [8] Richard Montgomery [9] Alexey Pokrovskiy [10] Pósa rotation [11] Munhá Correia [12] Nemanja Draganić

که در مقاله‌ای در نوامبر ۲۰۲۳ با آن برخورد کردند. مونها کوریا گفت: «ما دور هم نشستیم و متوجه شدیم که همهٔ این ایده‌ها را می‌توان در کنار هم قرار داد تا احتمالاً مسئله را حل کند.» شبکه مرتب‌سازی، گرافی است که شامل دو مجموعه تطابق A و B است. ساختار شبکهٔ مرتب‌سازی به‌گونه‌ای است که مهم نیست که چگونه نقاط A را با نقاط B جفت می‌کنید. می‌توانید مسیرهای غیرمتقاطعی را پیدا کنید که هر نقطه در A را به نقطه متناظر آن متصل می‌کند. سوداکوف توضیح داد: «شما به من می‌گویید چگونه وارد می‌شوید، و به من می‌گویید چگونه می‌خواهید خارج شوید.» «شبکه مرتب‌سازی دارای ویژگی است که از هر رأس یک مسیر به مقصد وجود دارد.»

مقالهٔ نوامبر حاوی اثباتی بود که انواع خاصی ازگراف‌های بسط‌دهنده باید حاوی شبکه‌های مرتب‌سازی باشند. دراگانیچ، مونتگومری، مونها کوریا، پوکروفسکی و سوداکوف متوجه شدند که اگر بتوانند شبکه‌های مرتب‌سازی را با چرخش پوسا ترکیب کنند، می‌توانند حدس را ثابت کنند. آن‌ها از روش‌های مقالهٔ نوامبر ۲۰۲۳ استفاده کردند تا نشان دهند که گراف‌های بسط‌دهنده نیز باید حاوی شبکه‌های مرتب‌سازی باشند. سپس، با درنظر گرفتن مجموعه‌های A و B به‌عنوان نقاط پایانی مسیرهایی که با استفاده از چرخش پوزا ایجاد کرده بودند، دیدند که می‌توانند مجموعهٔ مسیرهای طولانی خود را در یک دور همیلتونی گره بزنند. سوداکوف گفت: «ما تمام مفاهیم کلیدی را که برای اثبات نیاز داریم، متبلور کردیم.»

در ماه فوریه، گروه، مقاله خود را نوشته بود. این نه‌تنها حدس اولیهٔ کریولویچ و سوداکوف در سال ۲۰۰۲ را ثابت کرد، که از تعریف محدودتری برای بسط‌دهنده‌ها استفاده کرده بود، بلکه چیزی حتی قوی‌تر از آن را ثابت کرد: زمانی که c به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، هر c-بسط‌دهنده دارای یک دور همیلتونی است. روش آن‌ها همچنین یک دور همیلتونی واقعی را ایجاد کرد، نه اینکه به‌طور انتزاعی ثابت کند که وجود دارد. سوداکوف پیش‌نویس را به کریولویچ فرستاد. کریولویچ پاسخ داد: «من نسبت به این موضوع شک داشتم که در طول زندگی خود حل شود.» اثبات جدید، چندین سؤال در مورد دور هامیلتونی را حل می‌کند. برای مثال ثابت می‌کند که انواع خاصی از گراف‌ها که با گروه‌ها مرتبط هستند، به‌نام گراف‌های کیلی، باید دورهای همیلتونی داشته باشند. اما این حرف آخر نیست، ریاضی‌دانان هنوز هم می‌توانند تلاش کنند تا کمترین حد ممکن را در c، یعنی ضریب بسط پیدا کنند، و شاید ثابت کنند که دستهٔ وسیع‌تری از گراف‌ها، به نام گراف‌های محکم[13] باید دارای دور باشند. سوداکوف گفت که اگرچه این یک آرزو است، یک اثبات «حتی نزدیک به حل مسئله» وجود ندارد، و «هیچ مدرک خوبی وجود ندارد که این حدس حتی درست باشد.»

گور، که در این کار نقشی نداشت، گفت که این کار «ارتباط اساسی بین دو شیء که در علم کامپیوتر مرکزی هستند» برقرار می‌کند. او گفت که این ارتباط منجر به کاربردهای مهمی خواهد شد. «من نمی‌دانم چه شکلی خواهد بود. فقط به‌نظر می رسد که این مطمئناً مفید است.»

* Leila Sloman, In highly connected networks, there's always a loop, Quanta Magazine, June 7, 2024.

**دانشگاه یزد

[13] tough graphs