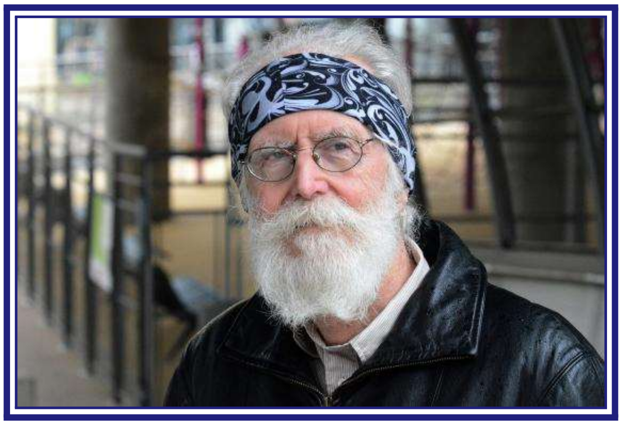
اخبار و یادداشت‌ها

میشل تالاگراند، برندهٔ جایزهٔ آبل ۲۰۲۴

عرفان صلواتی *



میشل تالاگراند

کمیتهٔ جایزهٔ آبل در سال ۲۰۲۴، میشل تالاگراند [1] ریاضی‌دان فرانسوی را به‌عنوان برندهٔ این جایزه اعلام نمود. در این نوشتار مروری بر دستاوردهای ریاضی‌ای که این جایزه را برای تالاگراند به‌ارمغان آورد خواهیم داشت.

یکی از مهم‌ترین دستاوردهای تالاگراند، نقش محوری او در توسعهٔ نظریهٔ زنجیره‌سازی عمومی [2] بوده است. موضوع مورد مطالعه در این نظریه، سوپریمم فرایندهای تصادفی است. درواقع اگر $\{X_t\}_{t\in T}$ یک فرایند تصادفی با مجموعهٔ اندیس T باشد، هدف یافتن کران‌های بالا و پائینی برای $\sup_{t\in T} X_t$ است. چنین کران‌هایی کاربردهای وسیعی در آنالیز تصادفی، ازجمله در نظم (همواری) مسیرهای نمونه‌ای فرایندهای تصادفی ایفا می‌کنند. ایده‌های اولیهٔ زنجیره‌سازی عمومی را می‌توان در کارهای کولموگرف یافت. هر فردی که درسی مقدماتی در آنالیز تصادفی گذرانده‌باشد با قضیه پیوستگی کولموگرف آشناست. این قضیه بیان می‌کند در حالتی که $T = \mathbb{R}^+$، تحت شرایطی بر روی کمیت $E[|X_s - X_t|^\alpha]$، می‌توان نسخه‌ای پیوسته از فرایند ساخت. ایدهٔ اصلی اثبات، ساختن دنباله‌ای از تقریب‌های گسستهٔ T_n برای مجموعهٔ اندیس T و مطالعهٔ دنبالهٔ تقریب‌های $X_{\pi_n(t)}$ است که $T \ni \pi_n(t) \to t$. این ایدهٔ اصلی زنجیره‌سازی است. پیشرفت‌های اساسی بعدی در این زمینه توسط دادلی [3] در ۱۹۶۷ و فرنیک [4] در ۱۹۸۵ محقق گردید که نشان دادند در مورد فرایندهای گاوسی، ویژگی‌های هندسی فضای متریک (T, d) که در آن

$$\mathrm{d}(s,t) = E[|X_s - X_t|^{2}]^{1/2},$$

ارتباط تنگاتنگی با سوپریمم فرایند تصادفی X_t دارند. به‌این دلیل است که گاهی نتایجی از این نوع به هندسهٔ فرایندهای تصادفی تعبیر می‌شوند.

تالاگراند در طی تحقیقات خود، نظریهٔ زنجیره‌سازی عمومی را برای فرایندهای گاوسی به اوج رساند و سپس آن را به انواع کلی‌تری از فرایندهای تصادفی بسط داد و برنامه‌ای را پایه‌گذاری کرد که در طی ۴ دهه توسط خودِ او و بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر دنبال شد. خودِ او، این کار را نخستین کار ریاضی «بزرگ» خود می‌داند. یکی از پیشرفت‌های اخیر این نظریه، اثبات حدسی از تالاگراند در مورد سوپریمم فرایندهای برنولی (سری‌هایی از متغیرهای تصادفی برنولی) بود که به حدس برنولی [5] معروف بود و درواقع منجر به بسط نظریهٔ زنجیره‌سازی به فرایندهای برنولی می‌شد. این حدس در سال ۲۰۱۱ توسط دو ریاضی‌دان اثبات شد. کتاب خودِ تالاگراند [۱] یکی از بهترین مراجع برای فهم نظریهٔ زنجیره‌سازی عمومی است.

حوزهٔ دیگری که تالاگراند دستاوردهای قابل توجهی در آن داشته است، نابرابری‌های تراکمی [6] است. پدیده تراکم اندازه، یکی از ویژگی‌های مختص ابعاد بالا است که با شهود هندسی ما متناقض است. صورت‌بندی ریاضی دقیق این پدیده در یک فضای متریک (X, d) مجهز به یک اندازهٔ احتمال P میسر است. برای هر مجموعهٔ

[1] Michel Talagrand [2] Generic Chaining [3] Richard M. Dudley [4] Xavier Fernique [5] Bernoulli Conjecture [6] Concentration Inequalities

بُرل A و عدد حقیقی نامنفی t، مجموعهٔ نقاطی که فاصله‌شان تا A حداکثر t است را با A_t نشان می‌دهیم. تابع تراکم در این چهارچوب عبارت است از یک کمیت $\alpha(t)$ که کوچک‌ترین عدد با خاصیت زیر است

$$\forall A \subset X : P(A) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_t) \geq 1 - \alpha(t).$$

پدیدهٔ تراکم اندازه عبارت است از اینکه در ابعاد بالا، کمیت $\alpha(t)$ با افزایش t بسیار کوچک میشود و تعبیر شهودی آن این است که مجموعه‌ای با اندازهٔ $\frac{1}{2}$، تقریباً تمام فضا را پر می‌کند (به این معنا که این مجموعه به همهٔ نقاط فضا نزدیک است). این ایده با کار ویتالی میلمن[۷] آغاز گردید و یکی از مفاهیم محوری نظریهٔ احتمال در فضاهای باناخ را تشکیل می‌دهد. این نوع نابرابری‌ها با عنوان نابرابری‌های هم‌محیطی نیز شناخته می‌شوند چرا که می‌توان آن‌ها را تعمیم طبیعی نابرابری‌های هم‌محیطی[۸] از فضای اقلیدسی به فضاهای متریک مجرد دانست. تالاگراند پدیدهٔ تراکم اندازه را به چهارچوب کلی‌تری تعمیم داد که در آن فضای متریک را با یک فضای احتمال حاصلضربی جایگزین کرد و به‌جای متریک d نوعی متریک همینگ[۹] وزن‌دار را به‌کار برد. او همچنین نسخه‌ای از پدیدهٔ تراکم اندازه را نیز ثابت کرد که در آن به‌جای مجموعه‌ها، توابع را درنظر می‌گیریم. تعبیر شهودی تراکم اندازه به‌زبان توابع این است که هر تابعی حول میانهٔ خود (و در نتیجه حول میانگین خود) متمرکز است. مجموعهٔ این نابرابری‌ها معروف به نابرابری‌های تالاگراند هستند. یکی از بهترین مراجع برای یادگیری این نابرابری‌ها و کاربردهای آن‌ها مقالهٔ خود تالاگراند است [۲].

دستاورد معروف دیگر تالاگراند، نتایج او در زمینهٔ شیشه‌های اسپینی[۱۰] است. شیشه‌های اسپینی حالت خاصی از مواد مغناطیسی هستند که مورد توجه فیزیک‌دانان آماری بوده و هستند. مدل ریاضی شیشه‌های اسپینی، یک تابع هامیلتونی به‌شکل زیر است

$$H_N(\sigma) = -\frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{i<j} g_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

که در آن β پارامتر دما، N تعداد اسپین‌ها و $\sigma \in \{-1,1\}^N$ یک آرایش بالقوه اسپین‌ها است. همچنین g_{ij}ها متغیرهای تصادفی گاوسی مستقل هستند. یکی از سؤالات مهم مربوط به شیشه‌های اسپینی، شناخت پدیدهٔ انتقال فاز آن‌ها است که مربوط به رفتار حدی مدل مذکور، وقتی $n \to \infty$ است. جورجیو پاریزی[۱۱] فیزیک‌دان، در ۱۹۸۰ پیش‌بینی‌ای توصیفی از رفتار این مدل ارائه کرد که به فرمول پاریزی معروف شد. این فرمول توسط جامعهٔ فیزیک‌دانان پذیرفته و دنبال شد. با این حال، تا سال‌ها از نظر ریاضی‌دانان یک حدس تلقی شد چرا که اثبات ریاضی دقیقی از آن وجود نداشت. تالاگراند در سال ۲۰۰۶ فرمول پاریزی را اثبات کرد (البته با تکمیل نتایجی که ریاضی‌دانان پیش از او در این خصوص ثابت کرده بودند). او همچنین کتابی در زمینهٔ مدل شیشه‌های اسپینی دارد [۳] که از مراجع اصلی ریاضی‌دانان برای یادگیری این حوزه است.

تالاگراند گزاره‌های بسیار مهم دیگری نیز به گنجینهٔ دانش ریاضی افزوده است که هم از حوصله خواننده و هم از تخصص نگارنده خارج است. از آن میان، به دو مورد معروف اشاره می‌کنیم. تالاگراند با ساختن یک مثال نقض، یک سؤال قدیمی حل نشده از فون‌نویمان[۱۲] و مهارام[۱۳] را پس از ۵۸ سال پاسخ داد. مثال وی عبارت است از یک زیراندازهٔ فراگیر[۱۴] که نسبت به هیچ اندازه‌ای مطلقاً پیوسته نیست (رجوع کنید به [۴]). دستاورد دیگری از وی این بود که نشان داد هزینهٔ انتقال بهینه[۱۵] بین یک اندازهٔ گاوسی و یک اندازهٔ دلخواه در حالت هزینهٔ انتقال مربعی، برابر است با انتروپی نسبی آن‌ها (رجوع کنید به [۵]).

تالاگراند جزو معدود ریاضی‌دانانی است که در همان زمینه‌هایی که تحقیقات درخشان انجام داده است، کتاب‌های مرجع مورد اقبالی هم نگاشته است. دو کتاب معروف او دربارهٔ زنجیره‌سازی عمومی و شیشه‌های اسپینی از این نوع هستند. همچنین او اخیراً کتابی مقدماتی در نظریهٔ میدان کوانتومی [۶] نگاشته است که به گفتهٔ خود وی دلیل آن پر کردن شکافی است که در منابع این موضوع برای ریاضی‌دانان مشاهده کرده بود.

علاوه بر جایزهٔ آبل، تالاگراند جوایز بسیاری را دریافت کرده است. وی در سال ۱۹۹۵ جایزهٔ لوئِو[۱۶]، در سال ۱۹۹۷ جایزهٔ فرما و در سال ۲۰۱۹ جایزهٔ شاو[۱۷] را برد. وی در سال ۲۰۰۴ به‌عنوان عضو آکادمی علوم فرانسه انتخاب شد و در سال ۲۰۱۱ عنوان شوالیهٔ لژیون دونور[۱۸] را دریافت کرد. وی تمام مدت اشتغال به کار رسمی خود، از سال ۱۹۷۴ تا زمان بازنشستگی‌اش در ۲۰۱۷، در موسسهٔ ملی پژوهش‌های علمی فرانسه (CNRS) سپری کرده است.

یکی از ویژگی‌های شخصیتی تالاگراند از نظر نگارنده، فروتنی خاصی است که در نوشته‌ها وسخنرانی‌های وی موج می‌زند. مثلاً وی معمولاً نقش خود را در پیشرفت‌های ریاضی دست‌کم می‌گیرد

[7] Vitali Milman [8] Isoperimetric [9] Hamming [10] Spin Glasses [11] Giorgio Parisi [12] John von Neumann [13] Dorothy Maharam [14] exhaustive
[15] Optimal Transportation [16] Loève prize [17] Shaw Prize [18] Chevalier de la Légion dHonneur

و نقش سایر ریاضی‌دانان را بزرگ جلوه می‌دهد. این فروتنی در زندگی‌نامه خودنوشتی که وی در سال ۲۰۱۹ به‌مناسبت دریافت جایزهٔ شاو نگاشته است و در صفحهٔ شخصی وی موجود است [۷] نیز دیده می‌شود.

با خواندن زندگی‌نامه مذکور، می‌توان به جنبه‌های مختلف شخصیت ریاضی وی نیز پی برد. مثلاً می‌توان فهمید که برخی ریاضی‌دانانی که بیشترین تأثیر را بر وی داشته‌اند گوستاو شوکه[۱۹]، ژیل پیسیه[۲۰] و ویتالی میلمن بوده‌اند. همچنین وی سبک ریاضی‌ورزیدن خود را در این زندگی‌نامه با عبارات مختلفی توصیف می‌کند، یکی «مطالعهٔ مسئله در حالات خاص» و همچنین «درنظر گرفتن ساده‌ترین حالت معنادار» و دیگری «تلاش متناوب برای اثبات و رد یک گزاره».

یکی از ویژگی‌های جالب شخصیت ریاضی تالاگراند، این است که او معمولاً روی مسائل حل نشدهٔ موجود کار می‌کند. همچنین برخی جنبه‌های ریاضی‌ورزیدن وی شاید در بین ریاضی‌دانان بزرگ دیگر کمتر متداول باشد. یکی از این جنبه‌ها که خود وی به آن اشاره می‌کند [۷]، تعداد زیاد کارهای «کوچک» وی است. منظور وی از «کوچک»، حل مسائلی است که شاید جزئی اساسی از یک نظریهٔ جامع نباشند بلکه مسائلی تک‌افتاده ولی در عین حال چالش‌برانگیز هستند. وی حل چنین مسائلی را ارزشمند می‌داند و گامی در جهت پیشرفت یک ریاضی‌دان می‌داند.

وبگاه شخصی تالاگراند ملغمه‌ای از اطلاعات مفید و نکات نغز است. در بالای صفحه جملهٔ «ریاضیات به تو بال می‌دهد» نقش بسته است به‌همراه پیوندی به نقاشی تمثیل حکمت الهی اثر لوکا جوردانو و تفسیر شخصی تالاگراند از این نقاشی. کمی پائین‌تر پیوندی با عنوان «با جایزه‌های من ثروتمند شوید» به‌چشم می‌خورد که در آن تالاگراند تعدادی مسئلهٔ حل نشده را به‌همراه جایزهٔ نقدی که وی برای حل آن‌ها قرار داده است معرفی می‌کند (یکی از این مسائل، حدس برنولی بود که همان‌گونه که پیش‌تر اشاره کردیم در سال ۲۰۱۱ حل شد و تالاگراند جایزهٔ وعده‌داده‌شده به‌مبلغ ۵۰۰۰ دلار را به حل‌کنندگان آن اهدا کرد).

میشل تالاگراند، با دستاوردهای برجسته‌اش در نظریهٔ اندازه، فرایندهای تصادفی و کاربردهای آن‌ها در فیزیک، تأثیر عمیقی در دنیای ریاضیات گذاشته است. ایده‌های ریاضی وی الهام‌بخش بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر بوده است و سرگذشت علمی وی انگیزه‌بخش هر شخص علاقه‌مند به ریاضیات است.

[1] M. Talagrand, The Generic Chaining: Upper and Lower Bounds of Stochastic Processes, Springer, 2005.

[2] M. Talagrand, Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, pp. 73-205, 1995.

[3] M. Talagrand, Spin Glasses: a Challenge for Mathematicians: Cavity and Mean Field Models, Springer, 2003.

[4] M. Talagrand, Maharam's problem, Annals of mathematics 168 (2008) 981–1009

[5] M. Talagrand, Transportation cost for Gaussian and other product measures, Geometric & Functional Analysis 6 (1996) 587–600.

[6] M. Talagrand, What Is a Quantum Field Theory?, Cambridge University Press, 2022.

[7] M. Talagrand, La page de Michel Talagrand [Online]. Available: https://michel.talagrand.net/longbio.pdf. [Accessed 12 07 2024].

* دانشگاه صنعتی امیرکبیر

[19] Gustave Choquet [20] Gilles Pisier