محاسبه نهمین عدد ددِکیند توسط دو گروه مستقل از ریاضی‌دانان *

رِیْچِل کرُوْوِل †

مترجم: محمد فرخی درخشنده قوچان **

کریستین یِکِل (چپ)، لِنّارت فان هیرتوم (وسط) و پاتریک دِ کازمائِکِر (راست)

ریچارد ددِکیند [۱] ریاضی‌دانان بزرگ قرن نوزدهم از جمله افرادی است که در مدرن‌سازی ریاضیات از بالاترین سطح تا بنیادهای آن تأثیرگذار بوده است. برای مثال او اولین فردیست که تعریف دقیقی از بی‌نهایت و نیز اعداد حقیقی که سنگ بنای بخش بزرگی از ریاضیات مدرن هستند ارائه کرده است.

در سال ۱۸۹۷ ددِکیند نتایج تحقیقات خود در مورد الگوهای عددی خاصی را منتشر کرد که منجر به تعریف دنباله‌ای از اعداد به نام دنباله ددِکیند یا اعداد ددِکیند شده است. این اعداد تعداد ساختارهایی را می‌شمارند که در شاخه‌های نسبتاً بی‌ربط ریاضی ظاهر می‌شوند[۲].

ددِکیند مقاله‌ی خود را این‌گونه به پایان می‌رساند که دنباله‌ی مفروض رشد بسیار سریعی دارد.

تعداد زیادی از مفاهیم بنیادی ریاضیات مدرن حاصل کار ددِکیند است. همچنین او دنباله یا اعداد ددِکیند را معرفی می‌کند که از نظر محاسباتی بسیار پیچیده‌اند.

نظر ددِکیند در مورد رشد سریع دنباله درست است و او خود چهار جمله‌ی اول دنباله را به طور دقیق محاسبه می‌کند، اگرچه در مورد صحت جمله چهارم یعنی عدد ۱۶۶ خیلی مطمئن نبود (در حقیقت محاسبات ددِکیند در مورد جمله چهارم درست بود اما وی دو حالت بدیهی را از قلم انداخته بود یا نادیده گرفته بود، ازاین‌رو جمله چهارم دنباله به طور دقیق‌تر عدد ۱۶۸ است). جملات پنجم و ششم دنباله در دهه چهل میلادی و جمله هفتم در سال ۱۹۶۵ محاسبه شدند. در سال ۱۹۹۱، داگلاس ویدمَن [۳] که برای شرکت ماشین‌های متفکر [۴] یکی از شرکت‌های پیشرو در زمینه‌ی ابرکامپیوترهای آن زمان کار می‌کرد، با انجام ۲۰۰ ساعت محاسبات کامپیوتری توانست جمله هشتم دنباله که برابر با ۵۶, ۱۳۰, ۴۳۷, ۲۲۸, ۶۸۷, ۵۵۷, ۹۰۷, ۷۸۸ می‌باشد را محاسبه کند. این رشد بسیار سریع دنباله را نشان می‌داد.

از آن زمان هیچ پیشرفتی حاصل نشد تا این‌که در آوریل ۲۰۲۴ دو تیم مستقل از محققان نتایج خود را در مورد جمله نهم دنباله ددِکیند که عددی ۴۲ رقمی است منتشر کردند. در این مقالات که با فاصله تنها سه روز از هم منتشر شده بودند، تیم‌ها که از کار هم بی‌خبر بودند از روش‌های متفاوتی برای محاسبات خود استفاده کرده بودند.

[۲] مترجم: اعداد ددِکیند کاربردهای جالبی هم دارند. برای مثال، جمله nـام دنباله ددِکیند مرتبه مشبکه توزیع‌پذیر آزاد تولید شده توسط یک مجموعه n عضوی را نشان می‌دهد.

†Rachel Crowell [1]Richard Dedekind [3]Douglas R. Wiedemann [4]Thinking Machines Corporation

ریچارد دِدِکیند

برای تعریف اعداد دِدِکیند می‌توان از سه روش مختلف استفاده کرد، رنگ‌آمیزی گوشه‌های یک مکعب n-بعدی، استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها، و نیز استفاده از ابزار منطق[۵].

لِنّارت فان هیرتوم[۶] یکی از دانشجویان تحصیلات تکمیلی در دانشگاه آلمانی پَدِبُورن[۷] که نویسنده‌ی مسئول یکی از دو مقاله نیز هست می‌گوید به دلیل شهود بیشتر، تفسیر دنباله بر حسب مکعب‌ها را ترجیح می‌دهد. فرض کنید دو رنگ مانند آبی و سفید داشته باشیم. مکعب n-بعدی را از یک گوشه روی زمین قرار داده و یکی از دو رنگ را به هر رأس نسبت دهید طوری که یک گوشه‌ی آبی هرگز پایین‌تر از یک گوشه سفید (با پیمایش یال‌ها) قرار نداشته باشد. تعداد چنین رنگ‌آمیزی‌ها چند است؟ برای مکعب n-بعدی این تعداد همان عدد n-ام دِدِکیند یا جمله n-ام دنباله دِدِکیند است که با نماد $d(n)$ نیز نشان داده می‌شود.

روش دیگر فکر کردن به مسئله استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌هاست. یک مجموعه n عضوی مانند $\{۱,\ldots,n\}$ در نظر بگیرید. این مجموعه ۲^n زیرمجموعه دارد که تشکیل یک مشبکه می‌دهند. خانواده‌ای از زیرمجموعها را با این ویژگی در نظر بگیرید که هیچ یک زیرمجموعه دیگری نباشد. چنین خانواده‌ای را یک پادزنجیر می‌گویند چرا که در مشبکه مربوطه هیچ دو عضو آن تشکیل یک زنجیر نمی‌دهد. (برای مثال $\{\{۱\},\{۲,۳\},\{۳,۴,۵\}\}$ یک پادزنجیر است.) تعداد پادزنجیرهای مشبکه متناظر با مجموعه n عضوی همان n-امین عدد دِدِکیند است.

برای مکعب دو بعدی که در حقیقت یک مربع است شش روش مختلف برای رنگ‌آمیزی گوشه‌ها وجود دارد که در آن یک گوشه سفید بالاتر از یک گوشه آبی قرار نمی‌گیرد. از این رو ۶ $d(۲) =$.

روش متداول دیگر برای تعریف اعداد دِدِکیند استفاده از توابع بولی است. اینها توابعی هستند که دنباله‌ای از صفر و یک یا بیت‌ها را گرفته و خروجی یک بیتی صفر یا یک را بر می‌گردانند. برای مثال فرض کنید یک تابع بولی چهار بیتی در دست داریم. مقدار تابع روی دنباله‌ی چهار بیتی ۰۰۰۰ یکی از اعداد ۰ یا ۱ است. اکنون بیت‌ها را یک‌به‌یک از صفر به یک تغییر می‌دهیم و در مرحله‌ای خروجی ممکن است از صفر به یک تغییر کند (و نه به عکس). تابع بولی یکنوا تابعی است که اگر روی یک ورودی داده‌شده مقدار ۱ اختیار کند با تبدیل صفرهای ورودی به یک، مقدار آن همچنان ۱ باقی بماند[۸]. تعداد چنین توابعی روی دنباله‌های n بیتی دوباره همان عدد دِدِکیند $d(n)$ است[۹].

صرف‌نظر از اینکه از چه روشی استفاده شود، رشد دنباله بسیار سریع خواهد بود. کریستین یِکِل[۱۰] دانشجوی تحصیلات تکمیلی دانشگاه صنعتی دِرِسدِن[۱۱] که مقاله دوم را نوشته است می‌گوید: اگر بخواهیم مقدار $d(۹)$ را به صورت مستقیم محاسبه کنیم به حافظه‌ای کامپیوتری بیشتر از هر چه امروز وجود دارد نیاز داریم.

۱.۴.۲ در جستجوی اعداد دِدِکیند

نویسندگان دو مقاله از روش‌های متفاوتی برای ساده کردن محاسبات

---

[۵] مترجم: روش‌های دیگری نیز برای تعریف اعداد دِدِکیند وجود دارد مانند شمارش تعداد مجتمع‌های سادکی مجرد روی یک مجموعه n عضوی. برای موارد بیشتر مرجع [۳] را ببینید.

[۹] مترجم: توابع بولی یکنوا در ارتباط مستقیم با مدارهای الکترونی یکنوا هستند یعنی مدارهایی که تنها از گیت‌های منطقی AND و OR استفاده می‌کنند. در حقیقت اگر مدارهای منطقی‌ای را که به ازای ورودی‌های یکسان خروجی یکسان تولید می‌کنند را معادل در نظر بگیریم، آن‌گاه تعداد مدارهای منطقی یکنوا با ورودی n بیتی با تعداد توابع بولی یکنوا روی دنباله‌های n بیتی یکسان و لذا برابر با عدد دِدِکیند $d(n)$ خواهد بود.

[6]Lennart Van Hirtum [7]Paderborn University [10]Christian Jäkel [11]Dresden University of Technology

استفاده می‌کنند.

یِکِل از اشیائی ریاضی به نام مشبکه‌های توزیع‌پذیر آزاد استفاده می‌کند که می‌تواند برای بررسی همه پادزنجیرهای یک مجموعه n عضوی بکار گرفته شوند. این مشبکه‌ها تقارن‌های ویژه‌ای دارند و یِکِل از آن‌ها برای تعریف ماتریس‌های مربعی خاصی استفاده می‌کند که می‌توانند با هم جمع و ضرب شده و نه تنها $d(n)$ که حتی $d(n+۱)$، $d(n+۲)$، $d(n+۳)$ و $d(n+۴)$ را نیز محاسبه کند. این یک جهش بزرگ در کار اوست.

The First Nine Dedekind Numbers

n	DEDEKIND NUMBER d(n)
0	2
1	3
2	6
3	20
4	168
5	7,581
6	7,828,354
7	2,414,682,040,998
8	56,130,437,228,687,557,907,788
9	286,386,577,668,298,411,128,469,151,667,598,498,812,366

نه جمله ابتدایی دنباله ددِکیند

با انجام محاسبات روی ۱۶۸ پادزنجیر متفاوت یک مجموعه‌ی چهار عضوی او توانست $d(۴+۴)$ یا همان $d(۸)$ را تنها در سه ثانیه محاسبه کند. با ترفند مشابهی یِکِل $d(۵+۴)$ یعنی $d(۹)$ را با استفاده از ۷,۵۸۱ پادزنجیر متفاوت یک مجموعه پنج عضوی محاسبه می‌کند. این محاسبات که با استفاده از مجموعه‌ای از پردازنده‌های گرافیکی اندیویا که در محاسبات ماتریسی بسیار سریع هستند انجام شده است همچنان ۲۸ روز زمان برده است.

پس از انتشار مقاله یِکِل و ارائه مقدار ۴۲ رقمی برای $d(۹)$، فان هیرتوم از پَدِبُورن که در حال بررسی دوباره محاسبات خود بود دست از کار کشید. او و همکارش مقدار $d(۹)$ را در ماه مارس محاسبه کرده بودند ولی برای اطمینان محاسبات خود را دوباره چک می‌کردند مبادا خطایی کوچک در محاسباتشان رخ داده باشد. ازآنجایی‌که عدد آنها همان عددی بود که یِکِل ارائه کرده بود، با عجله مقاله خود را تنها چند روز بعد منتشر کردند.

در سال ۲۰۱۴ پاتریک دِ کازمائِکِر[12] استاد دانشگاه کاتولیک لُوِفن[13] در بلژیک به همراه همکارش استفان دِ وانمَکِر[14] به فرمولی برای شمارش پادزنجیرها دست یافتند که رشد سریعی داشت. فان هیرتوم دانشجوی تحت راهنمایی دِ کازمائِکِر متوجه شد چه طور می‌تواند فرمول را ساده‌سازی کرده و از آن به عنوان موضوع پایان‌نامه ارشد خود استفاده کند. با این وجود هنوز محاسبات سنگینی لازم بود. پس از انجام محاسبات سه ماهه با استفاده از ابرکامپیوتری در پَدِبُورن، فان هیرتوم و دِ کازمائِکِر و همکارانشان به نتیجه رسیدند.

جواب مشترک هر دو مقاله به این صورت است:

$$d(۹)=۲۸۶,۳۸۶,۵۷۷,۶۶۸,۲۹۸,۴۱۱,۱۲۸,۴۶۹,۱۵۱,۶۶۷,۵۹۸,۴۹۸,۸۱۲,۳۶۶.$$

دِ کازمائِکِر معتقد است رشد نمایی قدرت محاسباتی کامپیوترها در دهه‌های آینده محاسبه $d(۱۰)$ را ممکن می‌سازد. اما به نظر یِکِل این بزودی اتفاق نخواهد افتاد. ما به ابزار جدیدی نیاز داریم. در حال حاضر ایده‌ای ندارم چطور می‌توان آن را انجام داد. شاید سخت‌افزار جدید یا الگوریتمی جدید نیاز باشد. یِکِل و فان هیرتوم هر دو می‌گویند فعلا دست از کار کشیده و روی رساله دکترایشان تمرکز می‌کنند. فان هیرتوم روی طراحی سخت‌افزارها کار می‌کند درحالی‌که فعالیت یِکِل مطالعه روی مسائل بهینه‌سازی در ساختارهای جبریست. یِکِل می‌گوید اگر وقت خود را صرف محاسبه‌ی مقدار $d(۹)$ نکرده بود رساله خود را باید دو سال پیش به اتمام می‌رساند. به نظر زمان استراحت فرا رسیده است.

* R. Crowell, Ninth dedekind number found by two independent groups, *Quanta Magazine* (2023).

[1] C. Jäkel, A computation of the ninth Dedekind number, *J. Comput. Algebra* **6/7** (2023), Paper No. 100006, 8 pp.

[2] L. Van Hirtum, P. De Causmaecker, J. Goemaere, T. Kenter, H. Riebler, M. Lass, and C. Plessl, A computation of the ninth Dedekind number using FPGA supercomputing, ACM *Transactions on Reconfigurable Technology and Systems*, Vol. 17, No. 3, Article 40

[3] https://oeis.org/A000372

**دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

[12] Patrick De Causmaecker [13] KU Leuven [14] Stefan De Wannemacker