



قضیه چهاررنگ ۱۸۵۲-۱۹۷۶

رابین ویلسون*

مترجمان: مریم صفازاده** و حسین شجاع‌الدینی†

منطق و فلسفه شهرت دارد، بیشتر به سبب «قوانین دمورگن» در نظریه مجموعه‌ها شناخته می‌شود. او همچنین نویسنده‌ای پرکار در زمینه ریاضیات برای عموم مردم بود و کتاب گنجینه پارادوکس‌های او که از نوشته‌های گسترده‌اش در آتنیوم^۲، یک نشریه ادبی و علمی آن زمان، گردآوری شده بود، در سال ۱۸۷۲ منتشر شد. در سال ۱۸۶۵ او اولین رئیس انجمن ریاضی لندن شد.

دمورگن سال‌ها با ریاضی‌دان ایرلندی، سر ویلیام روان همیلتون، مکاتبه داشت و اخبار، گپ‌های ریاضی و اطلاعات خانوادگی خود را با او به اشتراک می‌گذاشت. در ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲، او به همیلتون نوشت:

امروز یکی از دانشجوینم از من خواست دلیلی برای واقعیتی بیاورم که نمی‌دانم واقعیت است یا خیر. او می‌گوید که اگر شکلی به هر طریقی تقسیم شود و آن قسمت‌ها به گونه‌ای متفاوت رنگ‌آمیزی شوند به طوری که بخش‌هایی با خط مرزی مشترک، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند - ممکن است چهار رنگ لازم باشد، اما نه بیشتر.... سؤال این است که آیا نمی‌توان شرط لازم برای پنج رنگ یا بیشتر به دست آورد....

به عنوان نمونه برای نقشه‌ای که چهار رنگ مورد نیاز است، دمورگن چهار ناحیه مقابل به هم را رسم کرد.

آن «شاگرد من» فردریک گاتری^۳ بود، که بعدها فیزیکدان و بنیانگذار انجمن فیزیک لندن شد. او در سال ۱۸۸۰ یادداشتی برای مجموعه مقالات انجمن سلطنتی ادینبرو نوشت و مسئله را به برادر بزرگترش فرانسیس نسبت داد، که پیش‌تر شاگرد دمورگن بود و در حال رنگ‌آمیزی نقشه انگلستان بود و پرسیده بود آیا چهار رنگ برای همه نقشه‌ها کافی است. فرانسیس گاتری سرانجام استاد ریاضیات در آفریقای جنوبی و کارشناس شناخته شده گیاه‌شناسی شد؛ چندین

چکیده: مسئله چهاررنگ می‌پرسد که آیا می‌توان مناطق هر نقشه‌ای را که روی یک صفحه یا کره رسم شده است، تنها با چهاررنگ چنان رنگ‌آمیزی کرد که هر دو منطقه‌ای که مرز مشترکی دارند، رنگ‌های متفاوتی دریافت کنند؟ این مسئله اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط فرانسیس گاتری مطرح شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ توسط کنت آپل و ولفگانگ هیکن پاسخ داده شد، زمانی که به عنوان قضیه چهاررنگ شناخته شد. به مناسبت پنجاهمین سالگرد آن، این مقاله روند اثبات را مطرح می‌کند و به ویژه بر افرادی که درگیر آن شده‌اند، تمرکز می‌کند.



شکل ۱: آگوستوس دمورگان (۱۸۰۶-۱۸۷۱).

اوگاستس دمورگن

اوگاستس دمورگن^۱ اولین استاد ریاضیات در کالج تازه تأسیس دانشگاه لندن بود. او که به خاطر فعالیت گسترده‌اش در ریاضیات،

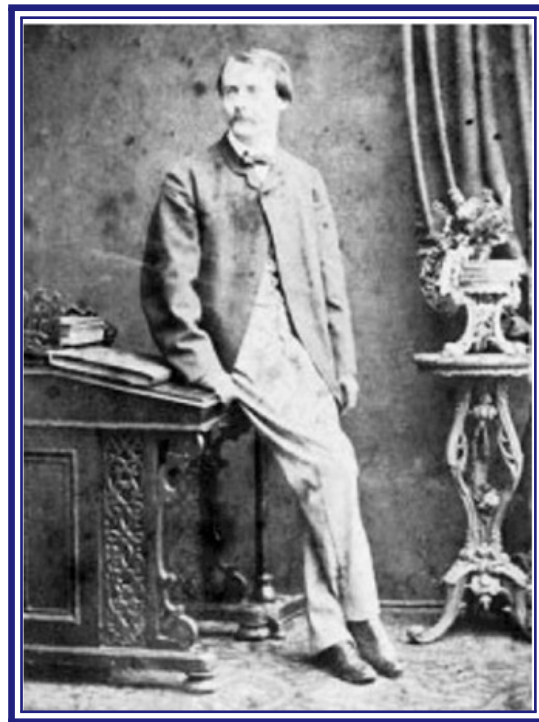
*Robin Wilson ¹Augustus De Morgan ²The Athenaeum ³Frederick Guthrie

دستگاه جبری معروف به کوآترینیون‌ها، در میان گذاشت، پاسخی تند اما مناسب دریافت کرد: «به این زودی‌ها قصد ندارم به «کوآترینیون رنگ‌های» شما بپردازم.»

قدیمی‌ترین توصیف چاپی شناخته‌شده از مسئله چهاررنگ به سال ۱۸۵۴ بازمی‌گردد، زمانی که پاراگرافی با عنوان «رنگ‌آمیزی نقشه‌ها» در ستون‌های مجله آتنیوم منتشر شد. این مطلب با امضای «F. G.»، احتمالاً توسط فردریک یا فرانسیس گاتری، و یا احتمالاً توسط جغرافی‌دان و دانشمند همه‌چیزدان، فرانسیس گالتون، که در آن زمان به دنبال پذیرفته شدن در باشگاه آتنیوم لندن بود، ارسال شده بود.

اشاره‌ای دیگر به این موضوع، بعدها در همان نشریه در سال ۱۸۶۰، در قالب نقدی بدون امضا بر کتاب، که توسط دموگن نوشته شده بود، منتشر شد و در نتیجه این یادداشت، مسئله چهاررنگ به آمریکا و به توجه چارلز سندرز پیرس رسید؛ او که بعدها منطق‌دان و فیلسوف برجسته‌ای شد، در آن زمان در دانشگاه هاروارد تحصیل می‌کرد، جایی که پدرش، بنجامین پیرس، برجسته‌ترین ریاضی‌دان آمریکایی عصر خود بود. چارلز جوان راه‌حلی را به انجمن ریاضی هاروارد ارائه داد، اما مشخص نیست این راه‌حل به چه شکلی بوده است.

گیاه به نام او نام‌گذاری شده است، از جمله خلنگ/اریکا گاتری/ی. با اینکه او بیشتر به این مسئله نپرداخت، اما مسئله چهاررنگ هنوز گاهی «مسئله گاتری» نامیده می‌شود.



شکل ۲: فرانسیس گاتری (۱۸۹۹-۱۸۳۱).

آرتور کیلی

دمورگن در سال ۱۸۷۱ درگذشت، بی‌آنکه از درستی یا نادرستی قضیه چهاررنگ آگاه باشد، و به نظر می‌رسید مسئله نیز با او از میان رفته است. اما هفت سال بعد در جلسه‌ای از انجمن ریاضی لندن، زمانی که توسط آرتور کیلی^۴، ریاضی‌دان کمبریجی، مطرح شد، دوباره ظاهر شد.

آرتور کیلی در لندن متولد شد، اما نخستین سال‌های زندگی خود را در روسیه گذراند، جایی که پدرش تاجر بود. پس از بازگشت به انگلستان، در لندن تحصیل کرد و سپس در ۱۷ سالگی وارد کالج ترینیتی کمبریج شد. پس از فارغ‌التحصیلی با درجه ممتاز در سال ۱۸۴۰، به عنوان عضو وابسته کالج منصوب شد، اما از آن‌جا که ملزم به گرفتن احکام دینی کلیسای انگلستان بود، در سال ۱۸۴۴ کمبریج را ترک کرد و به مدت ۱۹ سال به عنوان وکیلی موفق در انجمن‌های حقوقی لندن کار کرد. او در طول این مدت بیش از ۳۰۰ مقاله ریاضی نوشت و با دوست و همکار خود، جیمز جوزف سیلواستر، که نظریه

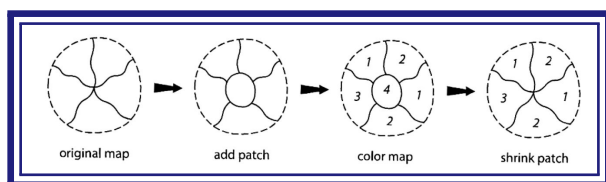
مسئله چهاررنگ به اشتباه به ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی، آگوست موبیوس، نسبت داده شده است؛ او در سال ۱۸۴۰ برای دانشجویانش مسئله‌ای مطرح کرد درباره‌ی پادشاهی در حال مرگ که قلمرو خود را به پنج پسرش به شرطی واگذار کرد که آن را به پنج قسمت تقسیم کنند به گونه‌ای که هر قسمت با چهار قسمت دیگر همسایه باشد. چنین تقسیمی به پنج ناحیه مقابل به هم در صفحه، نقشه‌ای را پدید می‌آورد که به پنج رنگ نیاز داشت، اما اثبات عدم وجود آن، قضیه چهاررنگ را اثبات نمی‌کند - این سوءتفاهمی است که چندین بار در طول تاریخ این مسئله رخ داده است.

دمورگن شیفته این چالش بود و از دوستان و همکارانش پرسید که آیا راه‌حل آن شناخته شده است یا خیر، اما پاسخی نیافت. از همان ابتدا، او به اشتباه معتقد بود که اثبات مسئله به طور اساسی به این مشاهده وابسته است که اگر یک نقشه شامل چهار ناحیه متقابلاً همسایه باشد، آن‌گاه یکی از آن‌ها باید توسط سه ناحیه دیگر محصور شده باشد. هنگامی که این موضوع را با همیلتون، مخترع

⁴ Arthur Cayley

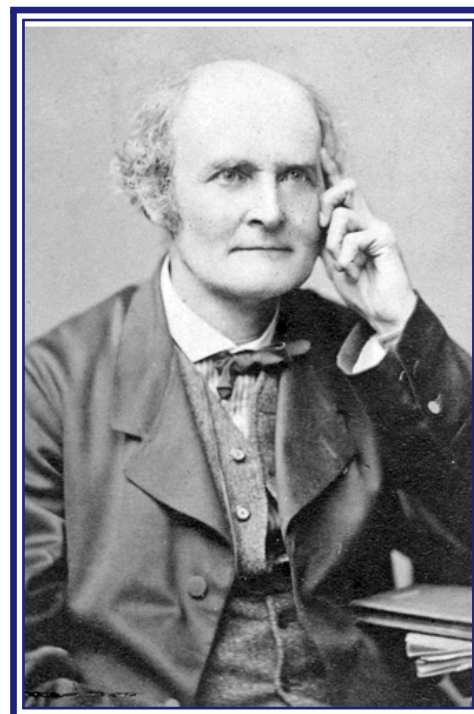
کوتاهی برای مجموعه مقالات انجمن سلطنتی جغرافیا با عنوان «درباره رنگ‌آمیزی نقشه‌ها» نوشت.

در این یادداشت، کیلی اعتراف کرد که قادر به یافتن یک اثبات نیست و سعی کرد توضیح دهد که دشواری آن ممکن است کجا باشد. به‌طور مفیدتری، او توضیح داد که چگونه مسئله کلی به‌سادگی به حالت نقشه‌های مکعبی - آن‌هایی که دقیقاً سه ناحیه در هر نقطه تلاقی دارند - تقلیل می‌یابد. زیرا هر جا بیش از سه ناحیه به هم می‌رسند، می‌توانیم یک «وصله» روی آن نقطه بچسبانیم که به یک نقشه مکعبی منجر می‌شود (شکل ۴ را ببینید). اگر این نقشه با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی باشد، آنگاه می‌توانیم هر وصله را به یک نقطه کوچک کنیم تا رنگ‌آمیزی نقشه اصلی حاصل شود. این یک پیشرفت مهم بود: از آن پس، رنگ‌آمیزان نقشه می‌توانستند توجه خود را تنها به نقشه‌های مکعبی معطوف کنند.



شکل ۴: مسئله چهاررنگ برای نقشه‌های مکعبی

ناورداها، موضوع جدید جبری را با او توسعه داد، آشنا شد. در سال ۱۸۶۳ او به عنوان اولین استاد ریاضیات محض سدلیترین به کمبریج بازگشت، مقامی که تا پایان عمر بر عهده داشت.



شکل ۳: آرتور کیلی (۱۸۹۵-۱۸۲۱).

آلفرد کمپ

یکی از افرادی که در جلسه ۱۳ ژوئن شرکت کرد، آلفرد بری کمپ^۵ بود، یک وکیل دادگستری و دانشجوی سابق ریاضیات کیلی در کالج ترینیتی. کمپ معتقد بود که می‌تواند قضیه چهاررنگ را اثبات کند و پس از چند ماه کار روی آن، مقاله‌ای [۹] تولید کرد که به دعوت سیلوستر به‌عنوان سردبیر، به مجله ریاضی آمریکا ارائه داد و در آن‌جا منتشر شد. او همچنین پیش‌نویسی از آن را به مجله علمی نیچر فرستاد.

کمپ در مقاله خود نشان داد که هر نقشه مکعبی باید حداقل دارای یک ناحیه با حداکثر پنج یال مرزی باشد - یعنی یک دوگوش، مثلث، مربع یا پنج‌گوش. برای دیدن دلیل این امر، از فرمول چندوجهی اویلر استفاده می‌کنیم که براساس آن برای هر نقشه صفحه‌ای با R ناحیه، E یال و N نقطه تلاقی نواحی داریم $N - E + R = 2$. اگر c_k تعداد نواحی با k یال باشد، آن‌گاه

پس از دموورگن، سیلوستر و کیلی به‌ترتیب رؤسای انجمن ریاضی لندن شدند. در دهه ۱۸۷۰، کیلی به شمارش مولکول‌های شیمیایی پرداخت، در حالی که سیلوستر ارتباطات فرضی بین مولکول‌ها و ناوردهای جبری را بررسی می‌کرد که این امر منجر به معرفی واژه «گراف» (به معنای نظریه گراف) توسط او در سال ۱۸۷۸ شد.

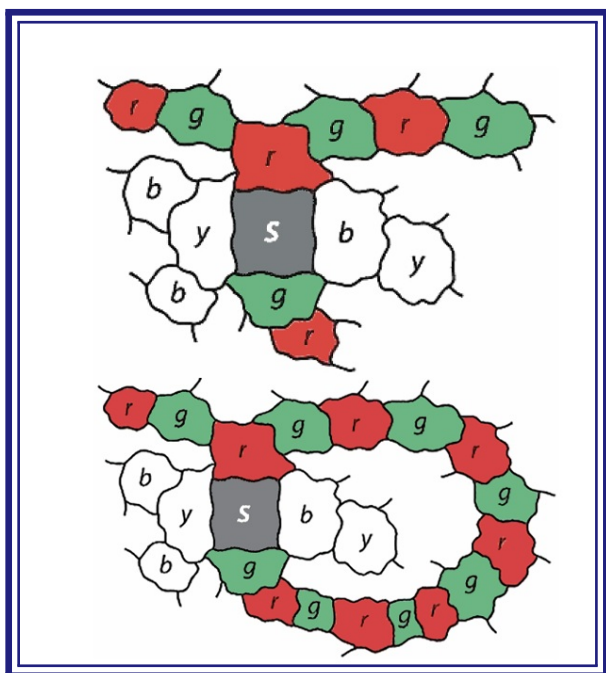
در سال ۱۸۷۵، سیلوستر که پنج سال پیش از آن از آکادمی نظامی سلطنتی در وولینج بازنشسته شده بود، به عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه جانز هاپکینز در بالتیمور منصوب شد. اولین استاد ریاضیات در دانشگاه تازه‌تأسیس جانز هاپکینز در بالتیمور. او در آن‌جا یک مدرسه تحقیقاتی ریاضیات بنا نهاد و به تأسیس مجله ریاضی آمریکا کمک کرد؛ این مجله شامل مقالاتی از ریاضی‌دانان نوظهور آمریکایی و همچنین ریاضی‌دانان نامدار اروپایی بود.

در ۱۳ ژوئن ۱۸۷۸، کیلی در جلسه انجمن ریاضی لندن شرکت کرد و در آن‌جا پرسید که آیا مسئله رنگ‌آمیزی نقشه‌ها با چهاررنگ حل شده است یا خیر. او به‌زودی به این مسئله علاقه‌مند شد و به دعوت دوستش فرانسیس گالتون، یادداشت

⁵ Alfred Bray Kempe

بنابراین در هر دو حالت مربع S قابل رنگ آمیزی است و دوباره نتیجه با استقرا به دست می آید.

سپس کمپ به حالت باقی مانده که در آن نقشه شامل یک پنج گوش P باشد، پرداخت. اگر بقیه نقشه رنگ آمیزی شده باشد، و اگر P توسط هر چهار رنگ احاطه شده باشد به طوری که یک رنگ دو بار ظاهر شود، آن گاه انجام دو تعویض رنگ هر دو ظهور آن رنگ را حذف خواهد کرد. در آن صورت یک رنگ اضافی برای P وجود خواهد داشت و اثبات کامل می شود.



شکل ۶: روش زنجیره های کمپ

به نظر می رسد که این روش همه حالت های ممکن را پوشش می دهد، اما، چنان که خواهیم دید، گام آخر کمپ ناقص بود و استدلال او به عنوان یکی از مشهورترین برهان های مغالطه آمیز تمام دوران شناخته می شد.

به طور سودمندتری، کمپ ایده دیگری نیز مطرح کرد. هر رنگ آمیزی از نواحی یک نقشه، رنگ آمیزی پایتخت های آن ها را به دنبال دارد (شکل ۷ را ببینید). سپس اگر پایتخت ها را در هر جفت از نواحی همسایه به هم وصل کنیم، چیزی به دست می آید که کمپ آن را پیوندگاه نامید. مسئله چهاررنگ سپس به این تبدیل می شود که این پایتخت ها را با چهار رنگ چنان رنگ کنیم که هر دو پایتخت به هم پیوسته، رنگ های متفاوتی دریافت کنند. چنان که خواهیم دید، این نسخه دوگان مسئله، که در آن رنگ آمیزی نواحی یک نقشه با رنگ آمیزی رئوس یک گراف مسطح جایگزین می شود، بعدها به فرمول بندی استاندارد تبدیل گردید.

$3N = 2E$ (زیرا هر یال دو نقطه را به هم متصل می کند)، و بنابراین

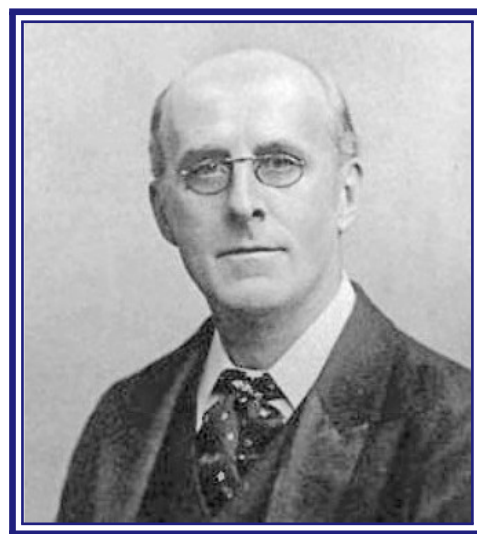
$$R = c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + \dots,$$

$$2E = 3N = 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + 8c_8 + \dots$$

با جایگذاری این عبارات در فرمول اولر، فرمول شمارشی زیر به دست می آید:

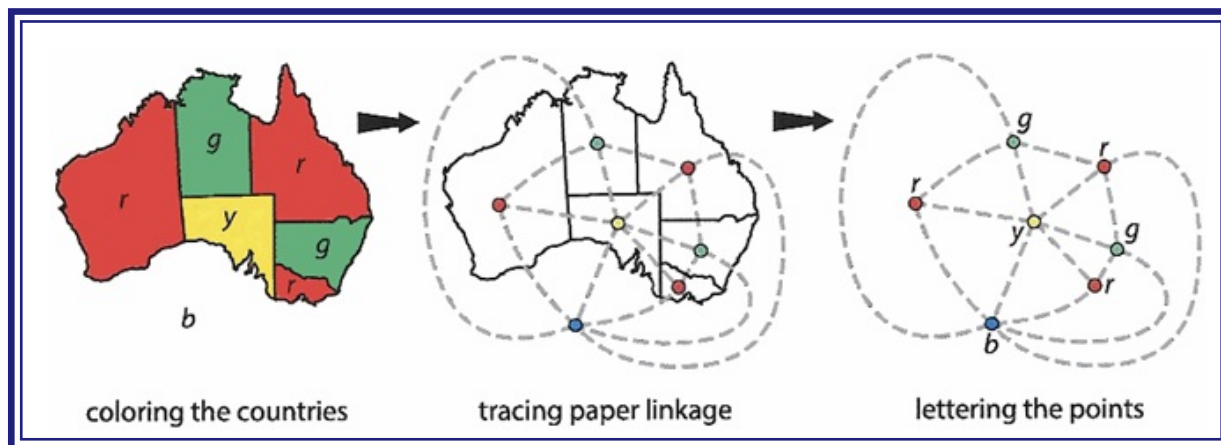
$$4c_2 + 3c_3 + 2c_4 + c_5 - c_7 - 2c_8 - \dots = 12.$$

بنابراین اگر هیچ ناحیه ای با حداکثر پنج یال مرزی وجود نداشته باشد، سمت چپ منفی می شود و با تناقض مواجه می شویم. اگر نقشه شامل یک دو گوش یا مثلث باشد، آن گاه یک اثبات با استقرا فوری به دست می آید: ما به سادگی بقیه نقشه را رنگ می کنیم و سپس یک رنگ اضافی برای رنگ آمیزی آن وجود خواهد داشت. اما اگر نقشه شامل یک مربع S باشد، ممکن است توسط نواحی با هر چهار رنگ (مثلاً قرمز، آبی، سبز و زرد، به همین ترتیب) احاطه شده باشد. برای مقابله با این حالت، کمپ یک استدلال مؤثر شامل تعویض رنگ ارائه داد که بعدها به عنوان روش زنجیره های کمپ شناخته شد.



شکل ۵: آلفرد کمپ (۱۸۴۹-۱۹۲۲).

کمپ به بخش های قرمز-سبز نقشه مجاور S نگاه کرد (شکل ۶ را ببینید). اگر اینها به هم متصل نباشند، آن گاه تعویض قرمزها و سبزها در یک بخش، یک رنگ اضافی برای S باقی می گذارد. اما اگر آن ها توسط یک زنجیره قرمز-سبز از نواحی به هم متصل شده باشند، آن گاه تعویض قرمزها و سبزها وضعیت را بهبود نمی بخشد. اما در این حالت، بخش های آبی-زرد مجاور S توسط زنجیره قرمز-سبز از هم جدا شده اند، و بنابراین می توان آبی ها و زرد ها را در یک بخش تعویض کرد، که باز هم یک رنگ اضافی برای S باقی می گذارد.



شکل ۷: رنگ‌آمیزی پیوندگاه

پیچیدگی غیرضروری و نشان دادن بصیرت اندک نسبت به مسئله، مورد انتقاد قرار داد. در پاسخ، تایت چند برهان کوتاه‌تر و ساده‌تر ارائه داد که همگی ناقص بودند.



شکل ۸: پیتر گاتری تایت (۱۹۰۱-۱۸۳۱).

هنگامی که کمپ برهان خود را ارائه داد، سیلستر در طول یک بازدید تابستانی از انگلستان در خارج از شهر بود و مقاله توسط همکار او ویلیام استوری در دانشگاه جانز هاپکینز که بنیان‌گذار و سردبیر مجله بود، پردازش شد. استوری در عین حال که نتوانست خطای اصلی کمپ را تشخیص دهد، متوجه شد که چگونه می‌توان برخی شکاف‌های کوچک در استدلال‌های کمپ را پر کند، و یادداشت کوتاهی با عنوان «یادداشتی بر مقاله پیشین» نوشت تا به دنبال برهان کمپ منتشر شود. شیفتگی استوری به مسئله چهاررنگ سال‌ها ادامه یافت و پس از کشف خطای کمپ، او در این مورد با سی. اس. پیرس مکاتبه کرد.

در این میان، آلفرد کمپ چندین مقاله قابل توجه درباره ویژگی‌های هندسی اتصال‌های مکانیکی نوشته بود و به‌خاطر این مقالات، و همچنین به‌خاطر حل فرضی مسئله چهاررنگ، در سال ۱۸۸۱ به عضویت انجمن سلطنتی لندن انتخاب شد. او بعدها خزانه‌دار این انجمن گشت و در این نقش، یک اکتشاف مهم به قطب جنوب را تأمین مالی کرد که بعدها یخچال کمپ و کوه کمپ به نام او نام‌گذاری شدند.

پیتر گاتری تایت

بعدها در همان سال، تایت ایده سازنده‌تری را مطرح کرد زمانی که نشان داد رنگ‌آمیزی نواحی یک نقشه مکعبی با چهار رنگ معادل است با رنگ‌آمیزی یال‌های مرزی آن با فقط سه رنگ به‌گونه‌ای که سه یال در هر نقطه تلاقی، به‌رنگ‌های متفاوت باشند (شکل ۹ را ببینید). او معتقد بود که اثبات این فرمول‌بندی جایگزین، بسیار

«برهان» کمپ به‌طور گسترده به‌عنوان راه‌حلی برای مسئله چهاررنگ پذیرفته شد. اما در اسکاتلند، متخصص فیزیک ریاضی، پیتر گاتری تایت^۱، یادداشتی در مجموعه مقالات انجمن سلطنتی ادینبرو در سال ۱۸۸۰ منتشر کرد و استدلال کمپ را به‌خاطر

^۱Peter Guthrie Tait

آن جا گذراند. او شخصی محبوب اما تا اندازه‌ای عجیب و غریب بود، ساعتش را فقط سالی یک بار در روز کریسمس تنظیم می‌کرد و روزی را تلف شده می‌دانست که حداقل در یک جلسه کمیته شرکت نمی‌کرد. هیتوود که از دوران دانشجویی در آکسفورد شیفته مسئله چهاررنگ شده بود، با کمال تعجب یک نقص اساسی در برهان کمپ کشف کرد.



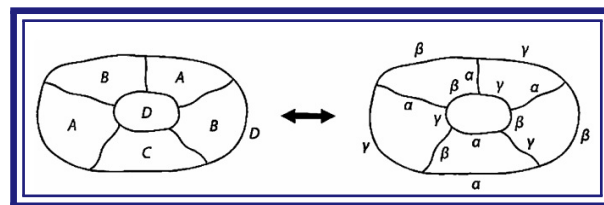
شکل ۱۰: پرسی هیتوود (۱۸۶۱-۱۹۵۵).

او در مقاله خود اشاره کرد که کمپ هنگام کار با پنج ضلعی فرض کرده بود که می‌توان دو تعویض هم‌زمان رنگ را انجام داد، اما هیتوود یک مثال مشخص ارائه داد که در آن این کار ممکن نبود. در مثال او (شکل ۱۱ را ببینید)، که در آن پنج ضلعی رنگ نشده در مرکز قرار دارد، می‌توان یک تعویض رنگ قرمز-سبز در بالای پنج ضلعی انجام داد، یا یک تعویض رنگ قرمز-زرد در پایین پنج ضلعی، اما اگر هر دو هم‌زمان انجام شوند، آن گاه نواحی سبز و زرد در سمت راست شکل هر دو قرمز می‌شوند که مجاز نیست.

خوشبختانه، هیتوود توانست تا اندازه‌ای وضعیت را نجات دهد، با تطبیق استدلال کمپ برای اثبات اینکه هر نقشه‌ای را می‌توان با پنج رنگ، رنگ‌آمیزی کرد — که خود نتیجه قابل توجهی بود.

مسئله مرتبط دیگری که هیتوود نیز به آن پرداخت، مسئله امپراتوری بود، که در آن هر کشور یک ناحیه ماهواره‌ای دارد که باید همان رنگ کشور مادری را دریافت کند. او ثابت کرد که همه چنین نقشه‌های مکعبی را می‌توان با دوازده رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و «با

آسان‌تر از نسخه اصلی است. اگرچه او در این مورد اشتباه می‌کرد، اما موضوع رنگ‌آمیزی یالی، بعدها به موضوعی مهم برای پژوهش تبدیل شد.



شکل ۹: باز صورت‌بندی تایت.

با فرض اینکه برهان کمپ حرف آخر را در این موضوع زده باشد، ریاضی‌دانان دیگری به مسئله علاقه‌مند شدند. چارلز لاتویج داجسون، مدرس ریاضیات آکسفورد، (که بیشتر با نام لوئیس کارول، نویسنده ماجراهای آلیس در سرزمین عجایب شناخته می‌شود) آن را به صورت یک بازی برای دو بازیکن طراحی کرد. و در کالج کلیفتون، یک مدرسه خصوصی نزدیک بریستول، مدیر مدرسه که شاید برهان‌های کوتاه تایت را به یاد می‌آورد، آن را به عنوان یک مسئله چالشی برای مدرسه مطرح کرد، با این شرط که «هیچ راه‌حلی نباید از یک صفحه، ۳۰ خط دست‌نوشته و یک صفحه نمودار تجاوز کند.» او همچنین آن را برای خوانندگانش به مجله آموزش فرستاد تا آن‌ها نیز تلاش کنند. یکی از خوانندگانی که چنین کرد فردریک تمپل، اسقف لندن، مدرس سابق ریاضیات در دانشگاه آکسفورد و بعدها اسقف اعظم کاتربری بود، که در حین پرسه زدن ذهنش در یک جلسه خسته‌کننده، راه‌حلی یافت. اما تمام کاری که او کرده بود این بود که ثابت کند در صفحه، پنج ناحیه همسایه نمی‌توانند وجود داشته باشند، که (چنان که پیش‌تر اشاره کردیم) نتیجه را ثابت نمی‌کند.

پرسی هیتوود

در سال ۱۸۹۰، مقاله‌ای پیشگامانه با عنوان «قضیه رنگ‌آمیزی نقشه» [۱۰] منتشر شد که قرار بود مسئله را برای ۸۶ سال دیگر به حالت تعلیق درآورد. نویسنده آن پرسی جان هیتوود^۲ بود، که در دوران تحصیل ریاضیات در دانشگاه آکسفورد با مسئله چهاررنگ آشنا شده بود. او پس از دریافت مدرک خود از آکسفورد به کالج‌های دورام (بعدها دانشگاه دورام) نقل مکان کرد، و بقیه عمر خود را در

²Percy John Heawood

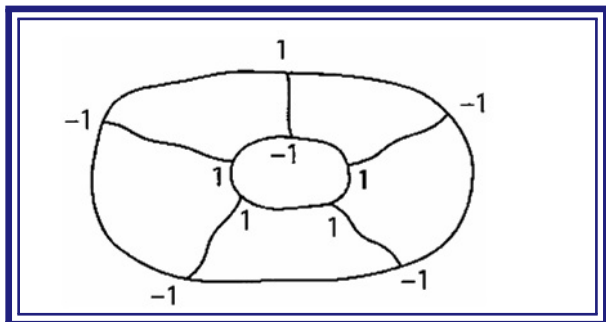
کرد، و هیتوود یک نقشه چنبره‌ای ارائه داد که از هر هفت رنگ استفاده می‌کند.

اما هیتوود نیز اشتباهاتی مرتکب شد. برای یک نقشه مکعبی با R ناحیه، E یال، و N نقطه روی سطح $S(g)$ ، فرمول اوایلر به ما می‌گوید که $N - E + R = 2 - 2g$. از این نتیجه، هیتوود استنتاج کرد که نواحی آن را می‌توان با

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{48g + 1}) \right\rfloor$$

رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، اما برای هر $g > 1$ او نتوانست ثابت کند که نقشه‌هایی وجود دارند که واقعاً به این تعداد رنگ نیاز دارند، ادعایی که به حدس هیتوود معروف شد. این حدس تا سال ۱۹۶۸ به‌طور کامل اثبات نشد ([۲] و [۳] را ببینید).

در سال ۱۸۹۸، هیتوود مقاله دومی نوشت که در آن مسئله چهاررنگ را بر حسب هم‌نهشتی‌های عددی بازنویسی کرد. او نخست نشان داد که رنگ‌آمیزی تایت از یال‌های یک نقشه مکعبی معادل است با تخصیص اعداد ۱ و -۱ به نقاط تلاقی، به‌گونه‌ای که مجموع اعداد دور هر ناحیه مضربی از ۳ باشد (شکل ۱۳ را ببینید). علاوه بر این، اگر نقاط با $p_1, p_2, \dots, p_n$ برچسب‌گذاری شوند، آن‌گاه برای هر ناحیه یک هم‌نهشتی $z_i + z_j + \dots + z_k \equiv 0 \pmod{3}$ وجود دارد، که در آن هر z_i برابر ۱ یا -۱ است و هرگاه نقطه p_i روی یک یال از آن ناحیه قرار داشته باشد، z_i در هم‌نهشتی ظاهر می‌شود.



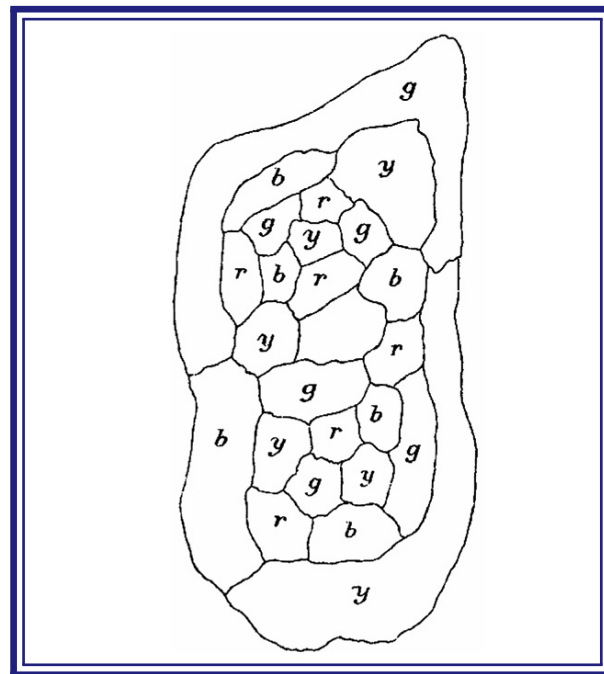
شکل ۱۳: برچسب‌گذاری هیتوود از نقاط یک نقشه مکعبی.

هیتوود در جستجوی مادام‌العمر خود برای یافتن برهانی برای قضیه چهاررنگ، به کاوش در هم‌نهشتی‌های خود ادامه داد و با مقاله‌ای که در نودمین سال زندگی‌اش منتشر شد، به کار خود پایان داد.

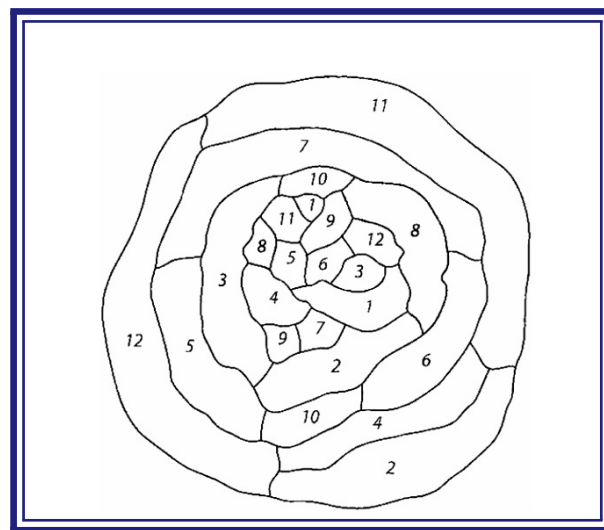
پاول ورنیکه

پس از افشاگری هیتوود، کمپ تلاش کرد برهان خود را تصحیح

دشواری بسیار» یک مثال مشخص به‌دست آورد که به همه دوازده رنگ نیاز دارد (شکل ۱۲ را ببینید). توجه کنید که هر امپراتوری دو قسمتی با همه امپراتوری‌های دیگر همسایه است.



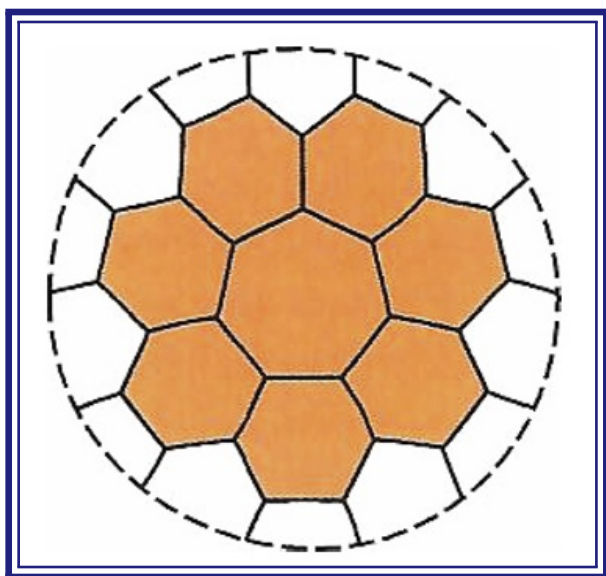
شکل ۱۱: مثال هیتوود (۱۸۶۱-۱۹۵۵).



شکل ۱۲: مسئله امپراتوری

سپس، پس از مشاهده اینکه کشیدن نقشه‌ها روی یک صفحه معادل با کشیدن آن‌ها روی یک کره است، هیتوود تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای نقشه‌های مکعبی کشیده‌شده روی دیگر سطوح جهت‌پذیر، مانند کره $S(g)$ با g دسته اضافه‌شده را بررسی کرد. برای مثال، هر نقشه روی چنبره $S(1)$ را می‌توان با هفت رنگ رنگ‌آمیزی

در کنار یک شش گوش باشد (شکل ۱۵ را ببینید). امید او این بود که بررسی این دو پیکربندی آخر آسان تر از پنج گوش ساده باشد. از این جا ایده اساسی مجموعه گریزناپذیر از پیکربندی ها در یک نقشه پدید آمد. یک پیکربندی با اندازه حلقه k شامل یک یا چند ناحیه است که توسط حلقه ای از k ناحیه دیگر احاطه شده اند، مانند شکل ۱۵، و یک مجموعه از پیکربندی ها گریزناپذیر است اگر هر نقشه مکعبی دست کم یکی از آن ها را داشته باشد. این مفهوم، که از کمپ سرچشمه گرفت و توسط ورنیکه توسعه یافت، در تلاش های بعدی بر روی مسئله چهاررنگ بسیار اساسی از آب درآمد.



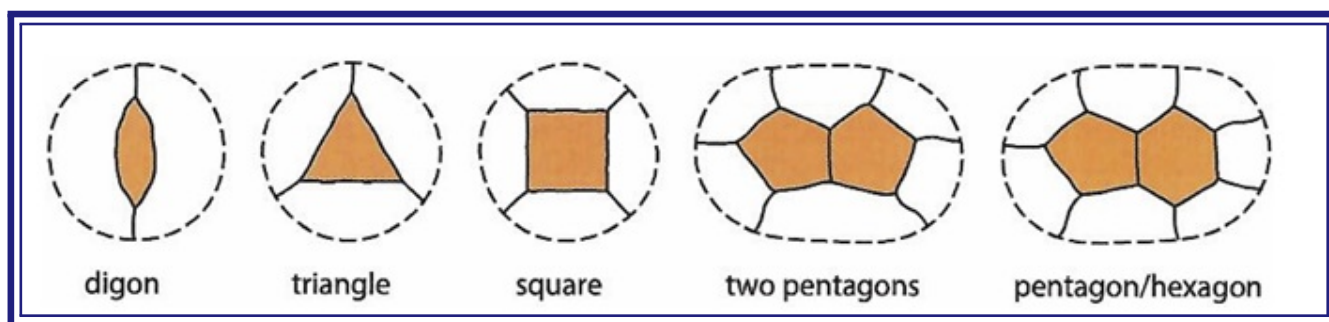
شکل ۱۴: یک پیکربندی با اندازه -حلقه ۱۴.

کند، اما موفق نشد. برخی ریاضی دانان حتی تردیدهایی ابراز داشتند که آیا نتیجه درست است یا خیر، به گونه ای که ریاضی دان دانمارکی، یولیوس پترسن^۳، اظهار داشت:

«من هیچ چیز را با قطعیت نمی دانم، اما اگر قرار باشد نظری دهم، معتقدم که قضیه چهاررنگ درست نیست.»

همچنین، در حدود آن زمان، هرمان مینکوفسکی^۴، ریاضی دان آلمانی، در دانشگاه گوتینگن درباره آنالیز مکان (توپولوژی) درس می داد. او با ادعای اینکه ناکامی ها در اثبات قضیه چهاررنگ به دلیل آن بوده که فقط ریاضی دانان درجه سوم این کار را کرده اند، به شاگردانش فخر فروخت که می توانند برهانی برای آن بیابند. چندین هفته از درس های او به تلاش برای یافتن این برهان گذشت، اما بی نتیجه ماند و سرانجام اعتراف کرد که او نیز شکست خورده است. اولین ایده جدید قرن بیستم توسط پاول ورنیکه^۵ مطرح شد. او که در سال ۱۸۶۶ در آلمان متولد شد، مدرک ریاضیات گرفت و سپس در سال ۱۸۹۳ به ایالات متحده مهاجرت کرد و شهروند آمریکا شد. او در کنتاکی به تدریس زبان های مدرن مشغول شد، اما عمدتاً به ریاضیات علاقه داشت و برای نوشتن رساله دکترای خود در آنالیز مکان (توپولوژی) به آلمان بازگشت و پس از آن به ایالات متحده برگشت.

ورنیکه مدت ها به مسئله چهاررنگ علاقه مند بود. زمانی که در آلمان بود، مقاله مهمی برای مجله ریاضی آنالنا نوشت که در آن ثابت کرد هر نقشه مکعبی بدون دو گوش، سه گوش یا چهار گوش، نه فقط یک پنج گوش، بلکه باید دارای دو پنج گوش مجاور یا یک پنج گوش



شکل ۱۵: مجموعه گریزناپذیر ورنیکه.

³Julius Petersen

⁴Hermann Minkowski

⁵Paul Wernicke

اسوالد وبلن

سال ۱۹۱۲ سال مهمی برای مسئله چهاررنگ بود، با دو مقاله قابل توجه توسط آمریکایی‌ها که در مجله Annals of Mathematics منتشر شد. این مقالات، نوشته اسوالد وبلن^۱ و جرج بیرکاف^۲، به همراه مقاله تحول آفرین بیرکاف در سال بعد، دوره جدیدی از پیشرفت را در مسئله چهاررنگ آغاز کردند.



شکل ۱۶: اسوالد وبلن (۱۸۸۰-۱۹۶۰).

اسوالد وبلن در آیووا متولد شد و تحصیلات خود را در دانشگاه آیووا (که در سن ۱۴ سالگی وارد آن شد) و بعداً در دانشگاه هاروارد گذراند. او سپس به دانشگاه شیکاگو منتقل شد و در آنجا دکترای خود را با پایان‌نامه‌ای در زمینه هندسه، که حوزه ریاضیاتی است که بیشتر به خاطر آن شناخته می‌شود، به‌دست آورد. از ۱۹۰۵ تا ۱۹۳۲ در دانشگاه پرینستون تدریس کرد، پیش از آنکه به نخستین استاد ریاضیات در مؤسسه جدید مطالعات پیشرفته تبدیل شود.

وبلن در مقاله خود با عنوان «کاربرد معادلات هم‌نهشتی در آنالیز مکان» از ایده‌های هندسه و جبر برای جای‌دهی مسئله چهاررنگ استفاده کرد. او کار خود را با معرفی دو ماتریس برای مشخص کردن نقشه‌ها با برچسب‌گذاری‌های داده‌شده از رئوس (نقاط ملاقات)، یال‌های مرزی و نواحی آغاز کرد: این‌ها ماتریس وقوع رأس-یال A بودند که درایه (i, j) -ام آن اگر رأس i روی یال j قرار داشته

باشد ۱ و در غیراین صورت ۰ است، و ماتریس وقوع یال-ناحیه B که درایه (i, j) -ام آن اگر یال i با ناحیه j مرز داشته باشد ۱ و در غیراین صورت برابر ۰ است.

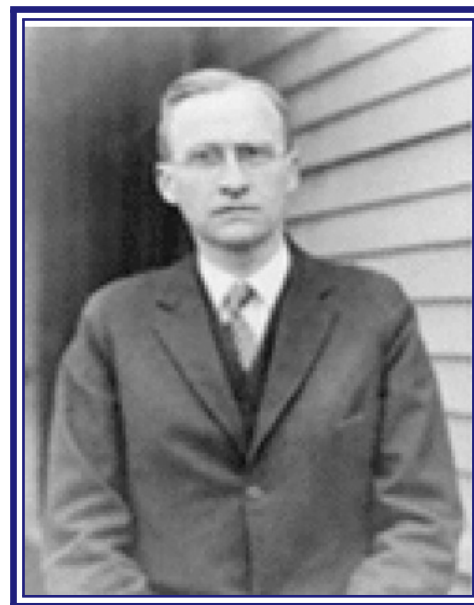
هر یک از این ماتریس‌ها به دو مجموعه از معادلات خطی منجر می‌شود؛ برای مثال، برای ماتریس B ، متغیرها در معادلات نشان‌دهنده نواحی نقشه هستند، و هر یال متناظر با یک معادله به شکل $y_a + y_b = 0$ است، که در آن y_a و y_b نشان‌دهنده نواحی‌ای هستند که در امتداد آن یال با هم اشتراک دارند. با در نظر گرفتن عناصر میدان متناهی با چهار عنصر برای نمایش چهاررنگ، وبلن ثابت کرد که یک راه‌حل برای مسئله چهاررنگ عبارت است از یافتن مجموعه‌ای از مقادیر $\{y_i\}$ که هیچ‌یک از این معادلات را برآورده نسازند.

وبلن بعداً این ایده‌ها را بیشتر توسعه داد و مسئله چهاررنگ را بر حسب زیرفضاهایی از یک فضای تصویری متناهی بیان کرد. او همچنین نشان داد که چگونه مجموعه‌ای از معادلات ناشی از ماتریس A به هم‌نهشتی‌های هیتوود منجر می‌شود که بعدها آن را آیرولر می‌نامیم.

جرج بیرکاف

در اوایل سال ۱۹۱۲، یکی از دوستان و هم‌عصران وبلن در پرینستون، جرج دیوید بیرکاف^۳ بود، یکی از همه‌فن حریف‌ترین و تأثیرگذارترین ریاضی‌دانان اوایل قرن بیستم. او در میشیگان متولد شد و از سنین پایین استعداد چشمگیری از خود نشان داد. در سال ۱۹۰۲ وارد دانشگاه شیکاگو شد، جایی که او و وبلن برای اولین بار با یکدیگر ملاقات کردند. پس از یک سال در آنجا، برای دریافت مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد خود به دانشگاه هاروارد نقل مکان کرد، پیش از آنکه برای نوشتن رساله دکتری در مورد معادلات دیفرانسیل به شیکاگو بازگردد. پس از گذراندن دو سال بعدی در دانشگاه ویسکانسین، به پرینستون منتقل شد و در آنجا به مقام استادی ارتقا یافت. در سال ۱۹۱۲ به هاروارد بازگشت و تا پایان عمر در آنجا ماند. اگرچه بیرکاف بیشتر به خاطر کارهایش در سیستم‌های دینامیکی، معادلات دیفرانسیل، نظریه ارگودیک و سایر حوزه‌ها شناخته می‌شود، اما شیفتگی مادام‌العمری به مسئله چهاررنگ داشت. او که همواره در جستجوی یک برهان بود، از همسرش می‌خواست نقشه‌های پیچیده‌ای برای رنگ‌آمیزی او بکشد.

¹Oswald Veblenand ²George Birkhoff ³George David Birkhoff



شکل ۱۷: جرج بیرکاف (۱۸۸۴-۱۹۴۴)

شاگرد سابق تحقیقاتی او، دانیل سی. لوئیس منتشر شد.
در سال ۱۹۱۳، در یک مقاله تحول آفرین [۱۱]، بیرکاف سهم قابل توجهی در حل نهایی مسئله چهاررنگ داشت، با توصیف یک پیکربندی به عنوان کاهش‌پذیر اگر هر رنگ‌آمیزی از حلقه اطراف نواحی بتواند به نواحی داخل گسترش یابد. از این نتیجه می‌شود که یک پیکربندی کاهش‌پذیر نمی‌تواند در یک مثال نقض کمینه برای قضیه چهاررنگ ظاهر شود.

بیرکاف پس از نشان دادن سیستماتیک اینکه هر پیکربندی احاطه‌شده توسط یک حلقه از سه یا چهار ناحیه کاهش‌پذیر است، به سراغ آن‌هایی با اندازه حلقه ۵ رفت و اثبات کرد که همه این‌ها، به جز پنج‌گوش منفرد، کاهش‌پذیر هستند.

او همچنین نشان داد که الماس بیرکاف (شکل ۱۸) متشکل از چهار پنج‌گوش که توسط حلقه‌ای از شش ناحیه احاطه شده‌اند، کاهش‌پذیر است. در اینجا اساساً ۳۱ رنگ‌آمیزی متفاوت برای حلقه اطراف وجود دارد؛ برای ۱۶ مورد از این‌ها، رنگ‌آمیزی مستقیماً به پنج‌گوش‌ها گسترش می‌یابد، در حالی که برای ۱۵ مورد باقی‌مانده، این امر پس از یک یا چند تعویض رنگ کمپ انجام می‌شود. در سال‌های بعد، پیکربندی‌های کاهش‌پذیر بسیار بیشتری کشف شدند که سرانجام به صدها و هزارها رسیدند.

فیلیپ فرانکلین

در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰، به‌طور پیوسته پیشرفت ادامه یافت. در سال ۱۹۲۱، ریاضی‌دان بلژیکی، آلفرد اِیررا^۴، رساله دکتری خود را درباره رنگ‌آمیزی نقشه برای دانشگاه بروکسل نوشت و پس از آن چندین مقاله دیگر منتشر کرد، به‌ویژه ثابت کرد که هر مثال نقض کمینه برای قضیه چهاررنگ باید دست‌کم دارای ۱۳ پنج‌گوش باشد، و نمی‌تواند فقط شامل پنج‌گوش‌ها و شش‌گوش‌ها باشد.

در همین حال در آمریکا، فیلیپ فرانکلین^۵ وارد صحنه شده بود. او فارغ‌التحصیل کالج سیتی نیویورک^۶ بود و به دانشگاه پرینستون منتقل شد و در آن‌جا رساله دکتری خود را با عنوان قضیه چهاررنگ زیر نظر اسوالد وبلن به پایان رساند. او پس از آن مقاله مهمی [۱۲] منتشر کرد که دانش موجود، هم در مورد مجموعه‌های گریزناپذیر و هم در مورد پیکربندی‌های کاهش‌پذیر را گسترش داد. در سال ۱۹۲۴ به مؤسسه فناوری ماساچوست نقل مکان کرد و تا پایان عمر در آن‌جا ماند، در زمینه‌های مختلف تحقیق کرد و چندین کتاب درسی

اولین رویکرد بیرکاف به رنگ‌آمیزی نقشه، رویکردی کمی بود، به این معنا که او $P(k)$ تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی یک نقشه مفروض با k رنگ را می‌خواست، برای مثال، برای یک نقشه با چهار ناحیه متقابلاً همسایه، این تعداد برابر است با

$$P(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k.$$

او ثابت کرد که $P(k)$ همواره یک چندجمله‌ای بر حسب k است (که اکنون چندجمله‌ای رنگی نقشه نامیده می‌شود)، نشان داد که اگر نقشه دارای n ناحیه و m یال باشد، آن‌گاه $P(k)$ با $k^n - mk^{n-1}$ شروع می‌شود، و فرمولی برای هر ضریب دیگر به‌دست آورد. او با مطالعه این چندجمله‌ای‌ها به‌طور کلی، امیدوار بود ثابت کند که برای همه نقشه‌ها $P(4) > 0$ است.

علاقه بیرکاف به چندجمله‌ای‌های رنگی در سراسر زندگی او ادامه یافت، و او در سال‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۳۴ مقالات دیگری در این زمینه منتشر کرد. مقاله اول توسط هاسلر ویتنی (که بعدها توپولوژیست پیشگامی شد) نوشته شد؛ ویتنی با ایده‌هایش درباره مسئله چهاررنگ، بیرکاف را تحت تأثیر قرار داده بود و رساله دکتری خود را با عنوان رنگ‌آمیزی گراف‌ها زیر نظر بیرکاف نوشت؛ ویتنی همچنین مقاله قابل توجهی درباره چندجمله‌ای‌های رنگی منتشر کرد که در آن روش ساده‌تری برای محاسبه ضرایب آن‌ها ارائه داد و اثبات کرد که این ضرایب همواره در علامت متناوب هستند. مقاله مشترک بلند و تأثیرگذاری در این زمینه بعدها توسط بیرکاف (پس از مرگ) به همراه

⁴Alfred Errera ⁵Philip Franklin ⁶City College of New York

معتبر برای دانشجویان نوشت.

سال ۱۹۴۰ به ۳۵ افزایش داده شد.

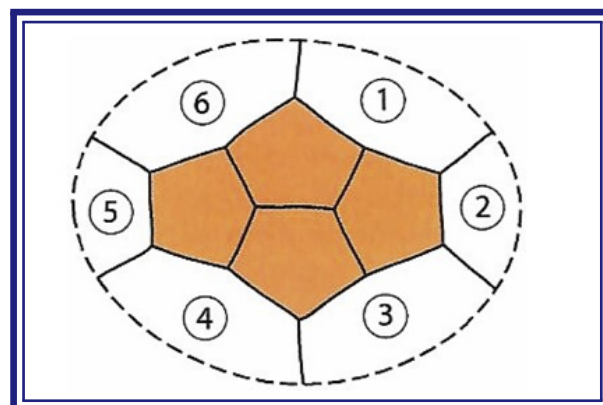
هاینریش هس

پس از جنگ جهانی دوم، تلاش‌ها برای اثبات قضیه چهاررنگ با ظهور ریاضی‌دان آلمانی، هاینریش هس^۷، مسیر متفاوتی را در پیش گرفت. او در کیل متولد شد، در مونیخ در هر دو رشته ریاضیات و موسیقی فارغ‌التحصیل شد و سپس دکترای خود را با پایان‌نامه‌ای درباره اصول موضوعه هندسه از دانشگاه زوریخ دریافت کرد. او سپس به دانشگاه گوتینگن منتقل شد و در آنجا دستیار هرمان وایل در مطالعات مربوط به بلورها شد. او در آنجا به‌خاطر حل «مسئله پارتک منظم» در مورد الگوهای کاشی‌کاری مسطح، به شهرت رسید؛ این بخشی از «مسئله ۱۸» بود، یکی از چالش‌هایی که دیوید هیلبرت در سخنرانی معروف خود در کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس در سال ۱۹۰۰ مطرح کرده بود.

اما از سال ۱۹۳۳، پاکسازی‌های ناسیونال سوسیالیست‌ها از کارکنان دانشگاه‌های آلمان، زندگی دانشگاهی را غیرقابل تحمل کرده بود و هس از موقعیت خود در گوتینگن استعفا داد. او به کیل بازگشت و دوازده سال بعد را با والدینش گذراند و با تدریس در مدرسه امرار معاش می‌کرد و در عین حال به تحقیقات خود در مورد الگوهای کاشی‌کاری ادامه می‌داد؛ یکی از این الگوها بعدها در سقف کتابخانه گوتینگن گنجانده شد.

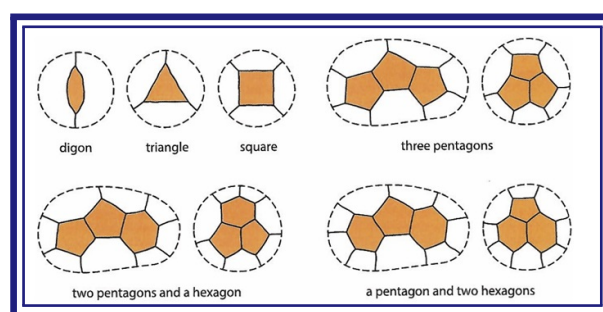
هس اولین بار در اواسط دهه ۱۹۳۰ با مسئله چهاررنگ آشنا شد و شifftگی مادام‌العمری نسبت به آن پیدا کرد. او به‌سرعت دریافت که برای حل آن باید به دنبال یک مجموعه گریزناپذیر از پیکربندی‌های کاهش‌پذیر باشد—«گریزناپذیر» به این معناست که هر نقشه باید شامل یک یا چند تا از این پیکربندی‌ها باشد، و «کاهش‌پذیر» به این معناست که هر کدام که باشد، هر رنگ‌آمیزی از بقیه نقشه می‌تواند به آن پیکربندی گسترش یابد. به عبارت دیگر، از آنجا که هیچ پیکربندی کاهش‌پذیری در مجموعه گریزناپذیر نمی‌تواند در یک مثال نقض کمینه برای قضیه چهاررنگ ظاهر شود، چنین مثال نقضی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

حدود سال ۱۹۴۸، هس سخنرانی‌ای درباره مسئله چهاررنگ برای مخاطبان زیادی در کیل ارائه داد. او با طرح نیاز به یک مجموعه گریزناپذیر متناهی از پیکربندی‌های کاهش‌پذیر، پذیرفت که چنین مجموعه‌ای ممکن است بسیار بزرگ باشد—احتمالاً شامل



شکل ۱۸: الماس بیرکاف

فرانکلین در مقاله خود از فرمول شمارش کمپ برای کشف پیکربندی‌های کاهش‌پذیر بیشتر استفاده کرد، مانند یک پنج‌گوش مجاور با سه پنج‌گوش و یک شش‌گوش مجاور با چهار پنج‌گوش و دو شش‌گوش. او همچنین ثابت کرد که هر نقشه بدون دوگوش، سه‌گوش یا چهارگوش باید شامل یک پنج‌گوش متصل به دو پنج‌گوش دیگر، یا به دو پنج‌گوش و یک شش‌گوش، یا به یک پنج‌گوش و دو شش‌گوش باشد؛ این امر مجموعه گریزناپذیر جدید در شکل ۱۹ را به‌دست داد. هیچ مجموعه گریزناپذیر دیگری تا سال ۱۹۴۰ ظاهر نشد تا زمانی که آنری لِبگ (که به خاطر انتگرال لِبگ معروف است)، در آخرین مقاله‌ای که نوشت، چندین مجموعه جدید تولید کرد.



شکل ۱۹: مجموعه گریزناپذیر فرانکلین

فرانکلین همچنین نتیجه گرفت که هر نقشه با حداکثر ۲۵ ناحیه را می‌توان با چهاررنگ، رنگ‌آمیزی کرد. سپس کار بیشتر در این زمینه توسط کلارنس رینولدز از دانشگاه ویرجینیای غربی انجام شد که این عدد را به ۲۷ افزایش داد و بعدها توسط سی. ئی. وین در

⁷Heinrich Heesch

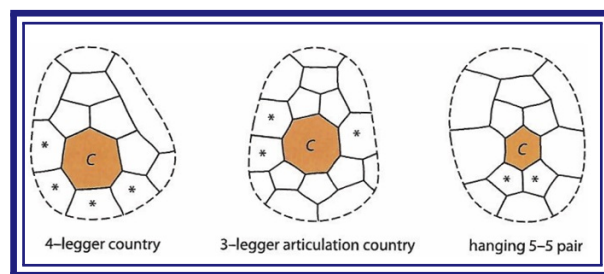
دادن گریزناپذیر بودن یک مجموعه مفروض از پیکربندی‌ها کشف کرد. این رویکرد به روش تخلیه بار معروف شد و اشکال گوناگونی دارد، اما برای نشان دادن ایده اصلی می‌توانیم ببینیم چرا مجموعه پیکربندی‌های ورنیکه (در شکل ۱۴) گریزناپذیر است.

پس فرض کنید، به‌منظور رسیدن به تناقض، نقشه‌ای وجود داشته باشد که فاقد دوگوش، سه‌گوش یا چهارگوش، فاقد دو پنج‌گوش مجاور، و فاقد پنج‌گوش مجاور با شش‌گوش باشد؛ آن‌گاه هر پنج‌گوش فقط مجاور با نواحی‌ای است که هفت یال یا بیشتر دارند. سپس، یک «بار» به اندازه $k-6$ به هر ناحیه k -ضلعی نسبت می‌دهیم، به‌طوری که پنج‌گوش‌ها بار واحد، شش‌گوش‌ها بار صفر، و چندضلعی‌های با بیش از شش یال بار منفی دریافت کنند. آن‌گاه از فرمول شمارش کمپ نتیجه می‌شود که بار کل روی کل نقشه ۱۲ است، یک عدد مثبت. اگر اکنون نقشه را با توزیع یکنواخت بار واحد روی هر پنج‌گوش بین پنج همسایه‌اش «تخلیه بار» کنیم، آن‌گاه بار کل روی نقشه مثبت می‌ماند، اما اکنون هر پنج‌گوش بار صفر دارد، شش‌گوش‌ها همچنان بار صفر دارند، و (به‌راحتی قابل بررسی است) بقیه بار کافی برای مثبت شدن دریافت نمی‌کنند. از اینجا نتیجه می‌شود که بار کل روی نقشه نامثبت است، و این تناقض، نتیجه را اثبات می‌کند.

در این زمان، موضوع نظریه گراف‌ها در حال توسعه بود و بیشتر رنگ‌آمیزان نقشه با مسئله چهاررنگ در «شکل دوگان» آن کار می‌کردند—یعنی در نسخه پیوندگاهی کمپ. در اینجا، به جای رنگ‌آمیزی یک نقشه با نواحی همسایه که رنگ‌های متفاوت دریافت می‌کنند، هدف رنگ‌آمیزی رئوس یک گراف مسطح است به‌گونه‌ای که هر دو رأس مجاور به‌رنگ‌های متفاوت رنگ شوند. برای این منظور، هشت نمادهای مناسبی برای رئوس متناظر با پنج‌گوش‌ها، شش‌گوش‌ها و غیره معرفی کرد (شکل ۲۱ را ببینید). در سال‌های بعد، این نمادها تقریباً به‌طور جهانی مورد استفاده قرار گرفتند.

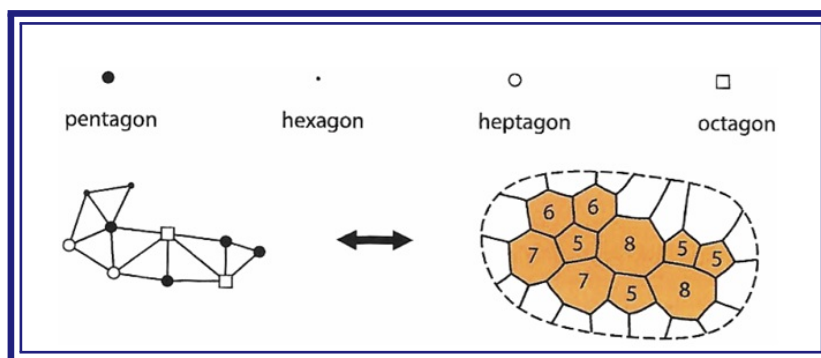
بالغ بر ۱۰۰۰۰ پیکربندی. برای کمک به طبقه‌بندی آن‌ها، او یک پیکربندی را D-کاهش‌پذیر تعریف کرد اگر هر رنگ‌آمیزی از نواحی در حلقه اطراف بتواند، چه مستقیماً و چه پس از تعویض رنگ، به پیکربندی گسترش یابد: چنان‌که دیدیم، دوگوش‌ها، سه‌گوش‌ها، چهارگوش‌ها و الماس بیرکاف همگی D-کاهش‌پذیر هستند. او همچنین پیکربندی را C-کاهش‌پذیر نامید اگر بتوان با اصلاح آن به روشی مناسب، آن را کاهش‌پذیر ساخت.

در همین حال، هشت در حال ساخت تعداد زیادی پیکربندی کاهش‌پذیر بود و در طول سال‌ها توانایی تشخیص کاهش‌پذیری پیکربندی‌ها را در نگاه اول توسعه داد—در نهایت با دقت بیش از ۸۰ درصد. برای این منظور، او به سه ویژگی اشاره کرد که حضورشان به‌نظر می‌رسید از کاهش‌پذیر بودن یک پیکربندی جلوگیری کند—این‌ها عبارتند از یک «ناحیه چهار-پا» مجاور با چهار ناحیه متوالی از حلقه اطراف، یک «ناحیه مفصلی سه-پا» مجاور با سه ناحیه (نه همه مجاور) از حلقه اطراف، و یک «جفت آویزان ۵-۵» از پنج‌گوش‌های مجاور که هر دو با یک ناحیه منفرد درون حلقه مجاورند (شکل ۲۰ را ببینید).



شکل ۲۰: سه مانع برای کاهش‌پذیری

همان‌طور که اشاره کردیم، در آن زمان مجموعه‌های گریزناپذیر کمی شناخته شده بودند، اما هشت یک رویکرد مفید برای نشان



شکل ۲۱: نماد هیش برای نواحی یک نقشه

ولفگانگ هیکن

سرانجام موفق شد یک راه حل کامل برای آن ارائه دهد که آن را در کنگره بین المللی ریاضی دانان در آمستردام در سال ۱۹۵۴ اعلام کرد. دشواری او در یافتن زمان برای نوشتن یک برهان کامل برای انتشار، در حین ادامه کار تمام وقت بود، اما این وظیفه سرانجام به پایان رسید و برهان مفصل او به موقع در Acta Mathematica منتشر شد.

یکی از دانشگاہیان که برهان هیکن را خواند، بیل بون، منطق دان دانشگاه ایلینوی در اربانا-شمپین بود. او که به شدت تحت تأثیر قرار گرفته بود، از هیکن به عنوان استاد مهمان به دانشگاه دعوت کرد و هیکن در آن جا درباره راه حل خود برای مسئله سخنرانی کرد. او سپس دو سال را در مؤسسه مطالعات پیشرفته پرینستون گذراند، پیش از آنکه برای گرفتن یک موقعیت دائمی به دانشگاه ایلینوی بازگردد.

هیکن سپس توجه خود را به اثبات حدس پوانکاره معطوف کرد. رویکرد او به هر مسئله دشوار این بود که آن را به صورت یک درخت با برگ ها و شاخه های بسیار در نظر بگیرد و اینها را یکی یکی قطع کند تا کل درخت از بین برود. برای حدس پوانکاره، او ۲۰۰ برگ برای حذف یافت و ادعا کرد که ۱۹۸ تا از آن ها را حذف کرده است. اما پس از ده سال دست و پنجه نرم کردن با دو تای آخر، سرانجام شکست خود را پذیرفت.

در سال ۱۹۶۷، اوستین اوره اولین کتاب را درباره مسئله چهاررنگ [۶] منتشر کرد، و در آن سال هیکن توجه خود را به موضوعی معطوف کرد که نزدیک به بیست سال از آن غافل شده بود. او ابتدا تصمیم گرفت با هش تماس بگیرد تا مشخص کند آیا مسئله چهاررنگ را حل کرده است یا هنوز مشغول کار روی ۱۰۰۰۰ حالت خاص خود است. در این زمان، هش هزاران پیکربندی کاهش پذیر تولید کرده بود، اما نتوانسته بود آن ها را در یک مجموعه گریزناپذیر بسته بندی کند.

هیکن از هش دعوت کرد تا سخنرانی ای درباره مسئله چهاررنگ در دانشگاه ایلینوی ارائه دهد، و از او پرسید که آیا استفاده روزافزون از رایانه ها ممکن است به بررسی این همه پیکربندی کمک کند. هش اکنون در دانشگاه آزاد هانوفر کار می کرد و قبلاً یک دانشجوی سابق فارغ التحصیل به نام کارل دوره را استخدام کرده بود تا پیکربندی ها را از نظر D-کاهش پذیری بر روی رایانه موجود دانشگاه آزمایش کند؛ برای هر پیکربندی مفروض، این کار می توانست به طور روتین با بررسی اینکه آیا همه رنگ آمیزی های حلقه اطراف می توانند، مستقیماً یا پس از تعویض رنگ، به نواحی داخل آن گسترش یابند یا خیر، انجام شود.

دیدیم که برای الماس بیرکاف با اندازه حلقه ۶ اساساً ۳۱

ولفگانگ هیکن^۱ که در سال ۱۹۲۸ در برلین متولد شد، از سنین پایین علاقه اش را به ریاضیات نشان داد. در سن ۱۵ سالگی به یک واحد ضد هوایی در جنگ جهانی دوم فراخوانده شد، در حالی که هم زمان به کارهای مدرسه خود ادامه می داد و آن را در اوایل سال ۱۹۴۶ به پایان رساند. در آن زمان، بیشتر دانشگاه های آلمان دانشجویان زیر ۲۳ سال را نمی پذیرفتند، اما دانشگاه کیل^۲ یک استثنا بود و هیکن تحصیلات خود را در آن جا درست در ۱۷ سالگی آغاز کرد و جوان ترین دانشجوی دانشگاه شد. او که در اواسط سال دانشگاهی برای خواندن ریاضیات، فیزیک و فلسفه پذیرفته شده بود، مستقیماً به دوره های ترم دوم وارد شد، بدون اینکه مبانی قبلی را مطالعه کرده باشد. اما او توانست خود را به بقیه برساند و بعدها این دوره را چنین توصیف کرد: «واقعاً خیلی، خیلی هیجان انگیز بود — برای من آن سال ها فوق العاده بودند».

کیل در آن زمان فقط یک استاد ریاضیات فعال داشت، کارل-هاینریش وایزه^۳. او که معلمی عالی بود، در سال ۱۹۴۷ یک درس توپولوژی ارائه داد که در آن به سه مسئله حل نشده اشاره کرد: مسئله گره، حدس پوانکاره، و مسئله چهاررنگ. هر سه بعدها بخش عمده ای از زندگی هیکن را به خود اختصاص دادند: با حل اولین آن ها توسط او، مشارکت های قابل توجهش در دومی، و در نهایت حل سومی به همراه کنت اپل.

هیکن در کیل با هاینریش هش آشنا شد و در سخنرانی او درباره مسئله چهاررنگ شرکت کرد. هیکن در آن زمان چیز زیادی از آن متوجه نشد، اما بعدها به یاد آورد که هش برای به دست آوردن یک برهان نیاز داشت به طور سیستماتیک حدود ۱۰۰۰۰ حالت خاص را بررسی کند. این سخنرانی بذری در ذهن هیکن کاشت که در دهه های بعد به ثمر نشست.

پس از دریافت مدرک خود در سال ۱۹۴۸، هیکن تحصیلات تکمیلی را با نظارت وایزه آغاز کرد و در سال ۱۹۵۳ دکترای خود را با پایان نامه ای در مورد توپولوژی ابعاد بالاتر دریافت نمود. او سپس به مونیخ نقل مکان کرد و در بخش تحقیق و توسعه شرکت زیمنس روی فناوری مایکروویو کار کرد.

هیکن در طول اقامت در مونیخ علاقه خود را به ریاضیات حفظ کرد و به طور خاص شیفته «مسئله گره» شد، یعنی تعیین اینکه آیا یک منحنی بسته سه بعدی مفروض (مانند یک توده نخ درهم) دارای گره است یا خیر. او در اوقات فراغت خود روی این مسئله کار کرد و

¹Wolfgang Haken ²University of Kiel ³Karl-Heinrich Weise

برخی پیوندهای بین منطق ریاضی و جبر نوشته بود. او یک برنامه‌نویس کامپیوتر بسیار ماهر بود و مهارت‌های محاسباتی خود را در دوران حضور در میثیگان آموخته بود و کارنامه او شامل کار برای شرکت هواپیماسازی داگلاس و تحقیق در مؤسسه تحلیل‌های دفاعی پرینستون، پیش از انتقال به دانشگاه ایلینوی در سال ۱۹۶۱ بود.

در زمان سخنرانی، اپل یکی از ممتحنان رساله دکتری یکی از دانشجویان پژوهشی هیکن در مورد جنبه‌ای از مسئله چهاررنگ بود و پس از اعلام نظر هیکن، او با پیشنهادی به هیکن نزدیک شد: «من چیزی در مورد کامپیوترها نمی‌دانم که نشود انجام داد: برخی چیزها فقط بیشتر از بقیه طول می‌کشند. چرا به آن حمله نکنیم؟»

تا این زمان، بیشتر رنگ‌آمیزان نقشه به دنبال پیکربندی‌های کاهش‌پذیر به تعداد زیاد بودند، پیش از آنکه به‌طور ناموفقی تلاش کنند تا آن‌ها را در مجموعه‌های گریزناپذیر بسته‌بندی کنند. اما رویکرد هیکن متفاوت بود، از این جهت که او به دنبال توسعه مجموعه‌های گریزناپذیری بود که شامل پیکربندی‌هایی می‌شدند که به‌نظر می‌رسید «احتمالاً کاهش‌پذیر» هستند، پیش از آزمایش این پیکربندی‌ها برای کاهش‌پذیری. هر پیکربندی که به‌سادگی کاهش‌پذیر نشان داده نمی‌شد، با پیکربندی‌های دیگر جایگزین می‌گردید. امید او این بود که این فرایند تکراری سریع‌تر به یک مجموعه گریزناپذیر از پیکربندی‌های کاهش‌پذیر منجر شود.

هنگامی که اپل و هیکن شروع به توسعه این ایده کردند، نخستین خروجی‌های پیکربندی‌ها از کامپیوتر حاوی موارد تکراری زیادی بود، اما اپل به‌زودی برخی اصلاحات ساده را معرفی کرد که فهرست را کاهش داد. این به‌سرعت به یک فرایند آزمایشی مداوم تبدیل شد، توسط اپل و هیکن که مرتباً الگوریتم تخلیه بار را تنظیم کرده و برنامه کامپیوتری را برای پالایش فهرست، بهبود می‌بخشیدند.

برای ساده‌سازی امور، آن‌ها توجه خود را به پیکربندی‌هایی محدود کردند که هیچ‌یک از سه مانع هش برای کاهش‌پذیری را شامل نمی‌شدند، زیرا این‌ها بعید بود در یک مجموعه گریزناپذیر نهایی ظاهر شوند. آن‌ها که در ابتدا بر روی پیکربندی‌های «از نظر جغرافیایی خوب» که فقط دو مانع اول (نواحی چهار-پا و سه-پا) را حذف می‌کردند متمرکز شدند، به این باور رسیدند که تولید یک مجموعه گریزناپذیر از پیکربندی‌های از نظر جغرافیایی خوب ظرف چند ماه واقعاً ممکن است. با این هدف، چندین ماه از سال ۱۹۷۴

رنگ‌آمیزی متفاوت از حلقه اطراف برای بررسی وجود دارد. اما با افزایش پیچیدگی پیکربندی‌ها، تعداد رنگ‌آمیزی‌ها به‌شدت افزایش می‌یابد — به‌ازای هر واحد افزایش در اندازه حلقه در ضریب ۴ — و برای یک پیکربندی با اندازه حلقه ۱۴، ۱۹۹۲۷۱ رنگ‌آمیزی برای بررسی وجود دارد. با این همه پیکربندی برای بررسی، هزاران ساعت مورد نیاز هر رایانه موجود در آن زمان دست‌نیافتنی به‌نظر می‌رسید. دانشگاه ایلینوی هیچ رایانه‌ای آماده برای استفاده نداشت، اما دپارتمان کامپیوتر آن توانست ترتیبی دهد که هش و دوره از رایانه قدرتمند کری در آزمایشگاه ملی بروکهایون در لانگ آیلند استفاده کنند. مدیر آن، یوشیو شیماموتو، خود شیفته مسئله چهاررنگ بود و از آن‌ها دعوت کرد تا دوره‌های طولانی را در بروکهایون بگذرانند. در آن زمان قبلاً معلوم شده بود که هر راه‌حلی لزوماً شامل پیکربندی‌هایی با اندازه حلقه ۱۲ یا بیشتر خواهد بود، و سپس دستگاه کری آن‌ها را قادر ساخت تا D- کاهش‌پذیری بسیاری از پیکربندی‌ها با اندازه حلقه ۱۳ را بررسی کنند، در حالی که روی آن‌هایی با اندازه حلقه ۱۴ نیز شروع به کار کردند.

در مرحله‌ای از تحقیقات، شیماموتو یک پیکربندی منفرد، به نام «نعل اسبی شیماموتو» با اندازه حلقه ۱۴، کشف کرد که D- کاهش‌پذیری مورد انتظار آن می‌توانست قضیه چهاررنگ را به‌طور کامل اثبات کند. شایعات به‌سرعت در سراسر جهان پیچید، اما پس از ۲۶ ساعت محاسبه طولانی، رایانه سرانجام، به ناامیدی همه، تأیید کرد که پیکربندی نعل اسبی به هر حال D- کاهش‌پذیر نیست.

کنت اپل

حدود سال ۱۹۷۰، هش برخی فرایندهای تخلیه بار جدیدی توسعه داده بود که به اعتقاد او مسئله چهاررنگ را به ۸۹۰۰ پیکربندی دشوار با اندازه حلقه تا ۱۸ تقلیل می‌داد، که سپس می‌توانستند به‌طور جداگانه آزمایش شوند. اما در این زمان هیکن نسبت به چشم‌انداز کار روی این همه حالت دشوار سرخورده شده بود، و در خلال سخنرانی که در دانشگاه ایلینوی ارائه می‌داد، اعلام کرد:

«متخصصان کامپیوتر به من گفته‌اند که ادامه دادن به این شکل ممکن نیست. اما من الان کنار می‌کشم. من معتقدم این نقطه‌ای است که تا آن و نه فراتر از آن، بدون کامپیوتر می‌توان پیش رفت.» یکی از افرادی که در سخنرانی هیکن حضور داشت، کنت اپل^۴ بود که رساله دکتری خود را برای دانشگاه میثیگان درباره

⁴Kenneth Appel

بودند، ممکن خواهد بود، و اینکه تعداد پیکربندی‌های مسئله‌دار کم خواهد بود. همچنین برای راحتی خیال آن‌ها، مشخص شده بود که نیازی به فراتر رفتن از اندازه حلقه ۱۴ نخواهند داشت. در طول چند ماه اول سال ۱۹۷۶، آن‌ها به اعمال بهبودهای بیشتر در روش‌های تخلیه بار خود ادامه دادند و از این پیکربندی‌های دشوار به‌عنوان راهنمای خود استفاده کردند.

در مارس ۱۹۷۶، دانشگاه ایلینوی یک کامپیوتر قدرتمند جدید خرید که در طول تعطیلات بهار تا حد زیادی بلااستفاده می‌ماند، و اپل توانست از آن به‌طور مؤثری برای کار عظیم بررسی همه پیکربندی‌هایشان از نظر کاهش‌پذیری استفاده کند. در عمل این امر ماه‌ها کار خسته‌کننده را برای آن‌ها به‌ارمغان آورد، و در نهایت شگفتی، این کار در ژوئن به پایان رسید. برای گرفتن جشن موفقیت خود، اپل یادداشتی روی تخته سیاه دیوار تمان ریاضیات نوشت:

«با احتیاط و بررسی‌های دقیق، به‌نظر می‌رسد که چهاررنگ کافی است.»

با کمک اعضای خانواده‌شان، بررسی‌های نهایی تنها در چند هفته تکمیل شد و به یک مجموعه گریزناپذیر از ۱۹۳۶ پیکربندی کاهش‌پذیر انجامید. در ۲۲ ژوئیه ۱۹۷۶، آن‌ها کار خود را عمومی کردند، همکاران خود را مطلع ساختند و پیش‌نویس‌هایی را برای سایر محققان این حوزه ارسال کردند.



شکل ۲۳: مهر پستی دیوار تمان ریاضیات به‌دنبال اعلام اثبات.

پیامدها

اپل، هیکن و کخ درست به موقع بودند، زیرا برخی از رقبای آن‌ها به راه‌حل‌های کامل نزدیک می‌شدند. بیل توت، ترکیبیات‌دان برجسته، راه‌حل آن‌ها را تأیید کرد و موفقیت آن‌ها در روزنامه‌های سراسر جهان گزارش شد. اپل و هیکن یک «اعلامیه تحقیقاتی» کوتاه برای انجمن ریاضی آمریکا نوشتند و ایده‌های اصلی برهان خود را در آن بیان کردند [۱۳].

در دسامبر ۱۹۷۷، اپل و هیکن مقاله مفصلی [۱۴] در «مجله ریاضیات ایلینوی» درباره بخش تخلیه بار برهان منتشر کردند، و دنباله‌ای [۱۵] را با جان کخ درباره بخش کاهش‌پذیری به‌طور مشترک

را صرف توسعه یک استدلال نظری کردند که تأیید می‌کرد چنین مجموعه گریزناپذیری با یک روش دست‌یافتنی برای ساخت آن واقعاً وجود دارد.



شکل ۲۲: کنت اپل (۱۹۳۲-۲۰۱۳) و ولفنگ هیکن (۱۹۲۸-۲۰۲۲)

به‌تدریج، اپل و هیکن دریافتند که اگرچه پیکربندی‌های D-کاهش‌پذیر معمولاً قابل مدیریت بودند (اگر خیلی بزرگ نبودند)، در مورد پیکربندی‌های C-کاهش‌پذیر، که در آن‌ها اصلاحات ضروری بودند اما ماهیت آن‌ها نامشخص بود، به کمی کمک نیاز خواهد بود. اپل با مراجعه به دیوار تمان علوم کامپیوتر دانشگاه، دانشجوی فارغ‌التحصیلی به نام جان کخ را یافت که مایل به همکاری بود. اپل به او مأموریت داد راه‌های ساده‌ای برای اصلاح پیکربندی‌های C-کاهش‌پذیر با اندازه حلقه ۱۱ بیابد، و هنگامی که کخ در این کار موفق شد، اپل توانست ایده‌های کخ را به پیکربندی‌هایی با اندازه حلقه بزرگ‌تر تعمیم دهد.

در سال ۱۹۷۵، اپل و هیکن سومین مانع هش برای کاهش‌پذیری (جفت آویزان ۵-۵) را وارد کردند و با خیال راحت دریافتند که تغییرات متعاقب در رویه‌هایشان تنها اندازه مجموعه گریزناپذیر را دو برابر خواهد کرد. بهبودهای گوناگونی که آن‌ها در این ماه‌ها به اعمال خود ادامه دادند، به‌زودی به یک «گفتگوی انسان-ماشین» منجر شد که در آن به‌نظر می‌رسید کامپیوتر رویکردهای خاص خود را کشف می‌کند که رویکردهای برنامه‌ریزی‌شده را بهبود می‌بخشید.

آن‌ها دیگر به این باور رسیده بودند که یافتن یک مجموعه گریزناپذیر عاری از مانع از پیکربندی‌هایی که احتمالاً کاهش‌پذیر

MAA Spectrum, vol. 108, MAA Press, Providence, RI, 2025. MR4922623

[4] Donald MacKenzie, Slaying the Kraken: the sociohistory of a mathematical proof, Soc. Stud. Sci. 29 (1999), no. 1, 7–60, DOI 10.1177/030631299029001002. MR1692830

[5] Rudolf Fritsch and Gerda Fritsch, The four-color theorem: History, topological foundations, and idea of proof, Springer Verlag, New York, 1998. Translated from the 1994 German original by Julie Peschke, DOI 10.1007/978-1-4612-1720-6. MR1633950

[6] Oystein Ore, The four-color problem, Pure and Applied Mathematics, vol. 27, Academic Press, New York-London, 1967. MR216979

[7] Thomas L. Saaty and Paul C. Kainen, The four-color problem: Assaults and conquest, McGraw-Hill International Book Co., New York-Bogotá-Auckland, 1977. MR480047

[8] Hans-Günther Bigalke, Heinrich Heesch (German), Vita Mathematica, vol. 3, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988. Kristallgeometrie. Parkettierungen. Vierfarbenforschung. [Geometry of crystals. Tilings. Four color problem], DOI 10.1007/978-3-0348-7246-1. MR946224

[9] A. B. Kempe, On the geographical problem of the four colours, Amer. J. Math. 2 (1879), no. 3, 193–200, DOI 10.2307/2369235. MR1505218

[10] P. J. Heawood, Map-colour theorem, Quarterly J. Pure and Applied Math. 24 (1890), 332–338.

[11] George D. Birkhoff, The reducibility of maps, Amer. J. Math. 35 (1913), no. 2, 115–128, DOI 10.2307/2370276. MR1506176

[12] Philip Franklin, The four color problem, Amer. J. Math. 44 (1922), no. 3, 225–236, DOI 10.2307/2370527. MR1506473

[13] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), no. 5, 711–712, DOI 10.1090/S0002-9904-1976-14122-5. MR424602

[14] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable. I. Discharging, Illinois J. Math. 21 (1977), no. 3,

تألیف نمودند؛ این مقالات با یک میکروفیش همراه بودند که ۴۵۰ صفحه توضیحات و نمودارهای بیشتر را ارائه می‌داد. در آن زمان، نویسندگان موارد بسیار تکراری و نمونه‌هایی از یک پیکربندی درون دیگری را یافته بودند و تعداد پیکربندی‌ها در فهرست منتشر شده اکنون به ۱۴۸۲ کاهش یافته بود. چند اشتباه که بعداً کشف شدند تصحیح شدند، اما اپل و هیکن می‌دانستند که با این همه خود-تصحیحی درون برهان، چند پیکربندی سرکش همیشه می‌توانند به راحتی جایگزین شوند.

اثبات به کمک کامپیوتر چنین مسئله دیرینه‌ای از سوی برخی با اشتیاق و از سوی بسیاری با ناراحتی و ناامیدی پذیرفته شد، اما توسط دیگرانی که استدلال‌های ریاضی را که نمی‌توانست با دست بررسی شود قبول نداشتند، کاملاً رد شد.

در سال ۱۹۸۶، اپل و هیکن مقاله‌ای طنزآمیز با عنوان «اثبات چهاررنگ کافی است» [۱۶] نوشتند که به بسیاری از انتقادات مطرح شده پاسخ می‌داد و سه سال بعد آن را با یک جلد بزرگ [۱۷] دنبال کردند که تمام خطاهای یافت شده را تصحیح می‌کرد و شامل چاپی از صفحات میکروفیش آن‌ها بود.

سپس، در سال ۱۹۹۴، نیل رابرتسون و پل سیمور، که تابستان‌های زیادی را صرف حل مسائل باز در نظریه گراف می‌کردند، با دانیل سندرز و رایین توماس همکاری کردند تا رویکرد اپل-هیکن را بازبینی کنند، آن را روان‌تر و سیستماتیک‌تر سازند، و یک مجموعه گریزناپذیر ساده‌تر با فقط ۶۳۳ پیکربندی کاهش‌پذیر به دست آورند [۱۸]. ده سال بعد، رویکرد آن‌ها به طور کامل توسط ژرژ گونتیه، دانشمند کامپیوتر فرانسوی، با ماشین بررسی شد [۱۹].

که ۶۰۰۰۰ خط از برهان زبان صوری را پیش از اعلام درست بودن اثبات آن‌ها تأیید کرد. سرانجام می‌توان قضیه چهاررنگ را اثبات شده تلقی کرد.

[1] Robin Wilson, Four colors suffice: How the map problem was solved, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2014. Revised color edition of the 2002 original, with a new foreword by Ian Stewart. MR3235839

[2] Robin Wilson, John J. Watkins, and David J. Parks, Graph theory in America—the first hundred years, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2023, DOI 10.2307/j.ctv2sbm8p2. MR4574842

[3] Lowell W. Beineke, Bjarne Toft, and Robin J. Wilson, Milestones in graph theory—a century of progress, AMS/-

MR1025335

[18] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas, The four-colour theorem, J. Combin. Theory Ser. B 70 (1997), no. 1, 2–44, DOI 10.1006/jctb.1997.1750.

MR1441258

[19] Georges Gonthier, Formal proof—the four-color theorem, Notices Amer. Math. Soc. 55 (2008), no. 11, 1382–1393. MR246399.

429–490. MR543792

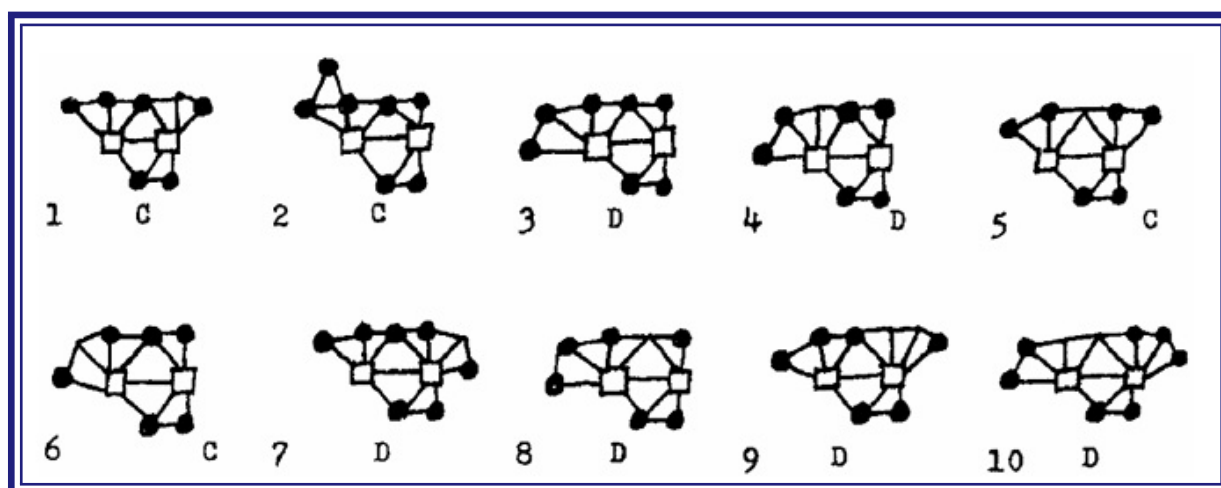
[15] K. Appel, W. Haken, and J. Koch, Every planar map is four colorable. II. Reducibility, Illinois J. Math. 21 (1977), no. 3, 491–567. MR543793

[16] K. Appel and W. Haken, The four color proof suffices, Math. Intelligencer 8 (1986), no. 1, 10–20, 58, DOI 10.1007/BF03023914. MR823216

[17] Kenneth Appel and Wolfgang Haken, Every planar map is four colorable, Contemporary Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. With the collaboration of J. Koch, DOI 10.1090/conm/098.

**دانشگاه یزد

† دانشگاه علوم پزشکی البرز



شکل ۲۴: تعدادی از پیکربندی‌های کاهش‌پذیر اپل و هیکن