

مسئله گالری هنری:

مرور و گسترشی بر رنگ‌آمیزی رنگی و نگهبانان متحرک*

نیکول چسнокوف*

مترجمان: سعید علیخانی و محمد فرشی**

چکیده: در این مقاله، ما به بررسی مسئله گالری هنری می‌پردازیم، که توسط چواتال در سال ۱۹۷۵ مطرح شد، و هدف آن یافتن کمترین تعداد نگهبان مورد نیاز برای پوشش یک گالری به شکل یک چندضلعی با n رأس است. چواتال یافت که $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ نگهبان گاهی ضروری و همیشه کافی است تا یک چندضلعی با n رأس پوشش داده شود. نخست یک اثبات شناخته‌شده برای این کران ارائه می‌دهیم. سپس دو گسترش از این مسئله را معرفی می‌کنیم. گسترش اول، مسئله اصلی را با تعیین کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی مجموعه‌ای از نگهبانان S ، به طوری که هیچ دو نگهبانی، با مناطق دید همپوشان، رنگ یکسانی نداشته باشند، تقویت می‌کند. گسترش دوم به نگهبانان اجازه می‌دهد متحرک باشند و هدف آن تعیین کوتاه‌ترین مسیر برای هر نگهبان جهت نگهبانی از فضا است.

یکی از تعمیم‌های متعدد این مسئله، مسئله گالری هنری رنگی است که هدف آن تعیین کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یک مجموعه نگهبانی؛ مجموعه‌ای از رؤس در یک چندضلعی با n رأس است. یک مجموعه نگهبانی به گونه‌ای رنگ‌آمیزی می‌شود که هیچ دو نگهبان همپوشان، رنگ یکسانی نداشته باشند، که در آن دو نگهبان همپوشان، نگهبان‌هایی هستند که نواحی دید آن‌ها با هم همپوشانی دارد. یک کران پایین برای این مسئله توسط اریکسون و لاواله^۵ در سال ۲۰۱۰ پیدا شد، که بیان می‌کرد برای هر مقدار k ، یک چندضلعی با $2 + 3k$ رأس وجود دارد به طوری که کمترین تعداد نگهبان‌های مورد نیاز k است. علاوه بر این، اریکسون و لاواله تعیین کردند که برای یک چندضلعی مارپیچ، عدد نگهبانی رنگی دارای یک کران بالای ۲ است. این قضایا در بخش ۳ بیشتر معرفی و اثبات خواهند شد [۳].

دومین تعمیمی که در این مقاله، در بخش ۴، بررسی خواهد شد، مسئله مسیر دیده‌بانی^۶ است. مسئله مسیر دیده‌بانی یک مسئله بهینه‌سازی در هندسه است که در آن نگهبان‌ها اکنون متحرک

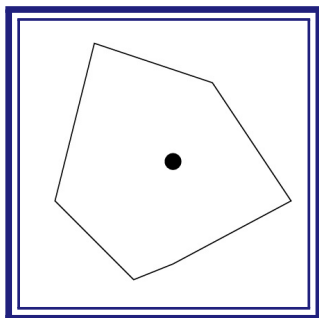
چکیده: در این مقاله، ما به بررسی مسئله گالری هنری می‌پردازیم، که توسط چواتال در سال ۱۹۷۵ مطرح شد، و هدف آن یافتن کمترین تعداد نگهبان مورد نیاز برای پوشش یک گالری به شکل یک چندضلعی با n رأس است. چواتال یافت که $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ نگهبان گاهی ضروری و همیشه کافی است تا یک چندضلعی با n رأس پوشش داده شود. نخست یک اثبات شناخته‌شده برای این کران ارائه می‌دهیم. سپس دو گسترش از این مسئله را معرفی می‌کنیم. گسترش اول، مسئله اصلی را با تعیین کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی مجموعه‌ای از نگهبانان S ، به طوری که هیچ دو نگهبانی، با مناطق دید همپوشان، رنگ یکسانی نداشته باشند، تقویت می‌کند. گسترش دوم به نگهبانان اجازه می‌دهد متحرک باشند و هدف آن تعیین کوتاه‌ترین مسیر برای هر نگهبان جهت نگهبانی از فضا است.

مقدمه

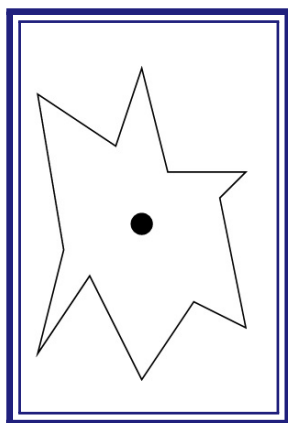
یکی از اهداف اصلی در رباتیک، ایجاد ربات‌هایی است که قادر به تقلید رفتار انسان باشند، که بخش بزرگی از آن شامل حسگرهای حرکتی و ناوبری است. ربات‌های دارای این قابلیت‌ها می‌توانند خود را در یک محیط جدید بومی سازی کنند و مجموعه‌ای از مسائل را حل کنند که یکی از ساده‌ترین آن‌ها نگهبانی از یک گالری هنری است. مسئله گالری هنری یکی از اولین و تأثیرگذارترین مسائل در زمینه مکان‌یابی حسگرها بود.

این مسئله نخستین بار توسط ویکتور کلی^۱ در سال ۱۹۷۳ برای واکلاو چواتال^۲ مطرح شد و به این صورت بیان گردید: «با در نظر گرفتن یک گالری هنری، کمترین تعداد نگهبانان ثابت مورد نیاز برای نگهبانی از آن اتاق چقدر است؟» در قالب هندسی، مسئله اینگونه بیان شد: با داشتن یک چندضلعی ساده با n رأس، کمترین تعداد

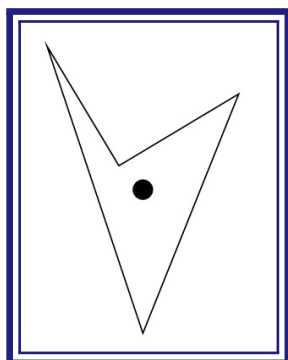
* مترجمین: منظور از چندضلعی ساده، یک چندضلعی است که یال‌های آن با هم برخورد ندارند (به جز در نقاط انتهایی یال‌ها).



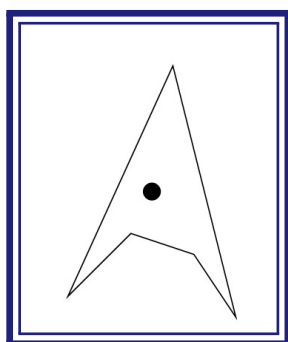
چندضلعی محدب



ستاره



۴-ضلعی



۵-ضلعی

هستند و هدف تعیین کوتاه‌ترین مسیری است که یک نگهبان باید طی کند، به‌گونه‌ای که همهٔ نقاط از این مسیر قابل مشاهده باشند. نخستین الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای این مسئله توسط کارلسون، جانسون و نیلسون^۷ در سال ۱۹۹۹ ارائه شد و در بدترین حالت دارای پیچیدگی زمانی $O(n^6)$ است. اساس این الگوریتم، از پیش محاسبه کردن کوتاه‌ترین مسیرهای ثابت نگهبان از طریق بازتاب‌ها^۸ در نقاط انتهایی قطعه است، به‌طوری‌که تنها حالتی که باید در نظر گرفته شود زمانی است که مسیرها بازتاب‌های کاملی ایجاد می‌کنند. با این کار، مسئله کاهش یافته و فرایندی به نام لغزش^۹ شبیه‌سازی بازتاب مسیر دیده‌بانی را انجام می‌دهد در حالی که نقطه بازتاب بین دو نقطه انتهایی یک قطعه فعال حرکت می‌کند. جزئیات بیشتر الگوریتم، تعاریف رویه‌ها و زمان اجرای آن در بخش ۴ توضیح داده شده است [۲].

مسئله گالری هنری

مسئله گالری هنری در هندسه به‌عنوان یافتن کمترین تعداد نگهبانانی که باید در یک چندضلعی ساده با n رأس قرار داده شوند تا همهٔ نقاط فضای داخلی قابل مشاهده باشند، فرمول‌بندی می‌شود. چندضلعی ساده یک ناحیه بسته متصل است که مرز آن توسط تعداد متناهی پاره‌خط تعریف می‌شود. دید به این صورت تعریف می‌شود که دو نقطه u و v به صورت متقابل قابل مشاهده هستند اگر پاره‌خط اتصال‌دهنده آن‌ها در داخل چندضلعی قرار گیرد. با استفاده از این تعاریف، استیو فیسک توانست قضیه اولیه چواتال را با استفاده از مثلث‌بندی و رنگ‌آمیزی رأس‌ها ثابت کند.

قضیه ۱. تعداد $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان گاهی ضروری و همیشه کافی است تا یک چندضلعی با n رأس پوشش داده شود.

اثبات

اثبات قضیه ۱ را با در نظر گرفتن چند چندضلعی نمونه و تعداد نگهبانان مربوطه مورد نیاز برای اطمینان از نگهبانی از کل ناحیه آغاز می‌کنیم. سپس مثلث‌بندی و رنگ‌آمیزی رأس‌ها را برای یافتن کران تعمیم‌یافته $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان معرفی می‌کنیم.

حالت‌های پایه

۱. تنها یک نگهبان ضروری است؛

⁷Carlsson, Johnsson and Nilsson

⁸reflections

⁹sliding

۰۲. دو نگهبان ضروری است.

تعیین شده‌اند (یعنی همگی با رنگ سوم رنگ خواهند شد). اکنون این سه یال به عنوان پایه‌های مثلث‌ها عمل می‌کنند، به‌طوری‌که رنگ رئوسی که با هر یک از آن‌ها مثلث تشکیل می‌دهند نیز از پیش تعیین شده است (یعنی با رنگ باقی‌مانده‌ای رنگ می‌شوند که در رئوس یالی که با آن مثلث می‌سازند استفاده نشده است).

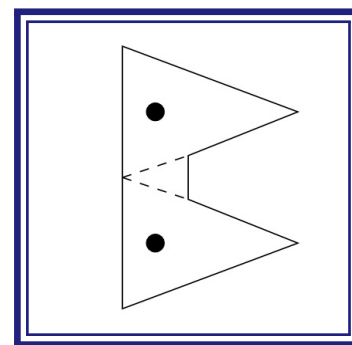
از آنجا که n رأس وجود دارد، می‌دانیم که یکی از رنگ‌ها حداکثر $\frac{n}{3}$ رأس را در بر می‌گیرد. بنابراین، یک رنگ را انتخاب کرده و نگهبانان را در رئوس آن رنگ قرار می‌دهیم، به‌طوری‌که حداکثر تعداد نگهبانان $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ باشد. از آنجا که هر یک از مثلث‌ها حداقل یک رأس با این رنگ دارند، این بدان معناست که هر مثلث نگهبانی می‌شود و در نتیجه کل چندضلعی نگهبانی می‌شود [۱].

در بالا فرض کردیم که مثلث‌بندی برای تمام گراف‌ها وجود دارد و فقط از این روش استفاده کردیم، اما باید ثابت کنیم که مثلث‌بندی همیشه وجود دارد. به‌طور کلی، یک مثلث‌بندی همیشه وجود ندارد، به‌ویژه در بُعد سه که در کتاب [۱] به تفصیل آمده است. با این حال، در مسئله گالری هنری ما تنها با چندضلعی‌های مسطح غیرمحدب سروکار داریم و بنابراین نشان خواهیم داد که مثلث‌بندی در واقع همیشه برای چنین اشکال هندسی وجود دارد. □

ادعای ۲: مثلث‌بندی همیشه برای چندضلعی‌های مسطح غیرمحدب وجود دارد.

اثبات. این قضیه را با استقرا^{۱۰} ثابت می‌کنیم. حالت پایه $n = 3$ است، که در این حالت چندضلعی یک مثلث است و به‌وضوح امکان مثلث‌بندی آن وجود دارد، یعنی از قبل مثلث‌بندی شده است. حال فرض کنید $n \geq 4$. برای استفاده از استقرا، باید نشان دهیم که یک قطر وجود دارد که چندضلعی را به دو بخش تقسیم می‌کند که هر یک از آن‌ها قابل مثلث‌بندی هستند.

به یاد بیاورید که مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی برابر است با $180^\circ \times (n - 2)$ و یک زاویه محدب دارای اندازه‌ای کمتر از 180° است. با ترکیب این دو ویژگی، باید یک رأس محدب در چندضلعی وجود داشته باشد که این امر از طریق اصل لانه‌کبوتری^{۱۱} حاصل می‌شود. ما می‌توانیم از اصل لانه‌کبوتری برای یافتن کران بالاتری برای تعداد رئوس محدب استفاده کنیم. اگر کمتر از دو رأس محدب وجود داشته باشد، آنگاه حداقل $n - 1$ رأس غیرمحدب



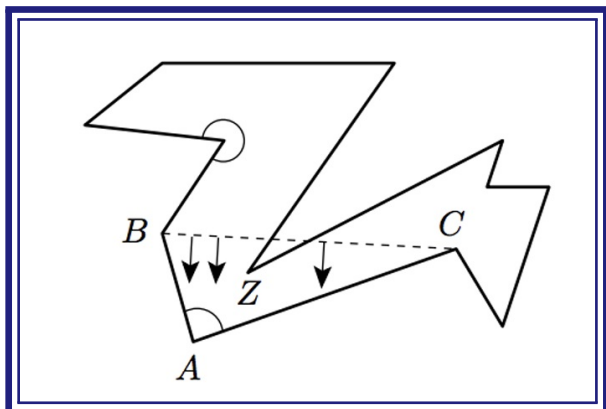
شکل ۲۵: چندضلعی شش رأسی.

اکنون چگونگی تعداد نگهبانان ضروری برای هر چندضلعی n -رأسی را تعیین کنیم. نخست باید چندضلعی را مثلث‌بندی کنیم. یعنی باید $n - 3$ قطر غیرمقاطع بین گوشه‌های دیوارها بکشیم تا وقتی که کل ناحیه از مثلث‌ها تشکیل شود. **ادعای ۱:** گرافی که پس از مثلث‌بندی تولید می‌شود، قابلیت **۳-رنگ‌آمیزی** دارد.

اثبات. برای حالت پایه $n = 3$ ، حکم بدیهی است. فرض کنید $n > 3$ باشد: ما مجموعاً $n - 3$ قطر غیرمقاطع بین گوشه‌های چندضلعی رسم می‌کنیم تا کل چندضلعی مثلث‌بندی شود. دو رأس u و v را انتخاب کنید که از طریق یک قطر به هم متصل شده‌اند. این قطر، چندضلعی را به دو بخش تقسیم می‌کند که هر دو در یال uv مشترک هستند. ما می‌توانیم در داخل هر یک از این بخش‌ها به اتصال دو رأس از طریق قطرهای ادامه دهیم، به‌طوری‌که در نهایت مثلث‌هایی کل مساحت چندضلعی را بپوشانند، یعنی ما چندضلعی را مثلث‌بندی کرده‌ایم. سپس، می‌توانیم رنگ‌آمیزی سه‌رنگی چندضلعی را شروع کنیم؛ به این صورت که یک رنگ را به رأس u و رنگ دیگری را به رأس v اختصاص دهیم. سپس، سومین رأس مجاور به این دو را با رنگ سوم رنگ می‌کنیم. از آنجا که کل چندضلعی مثلث‌بندی شده است، با استقرا می‌توانیم هر مثلث را با یکی از سه رنگ، رنگ کنیم به‌طوری‌که رنگ‌آمیزی‌های اولیه رأس u و رأس v حفظ شوند. راه دیگری برای مفهوم‌سازی این است که، از آنجا که رنگ‌های رئوس تشکیل‌دهنده یال اول، دو رنگ اول تعیین شده‌اند، رنگ‌های رئوسی که با این یال یک مثلث می‌سازند از پیش

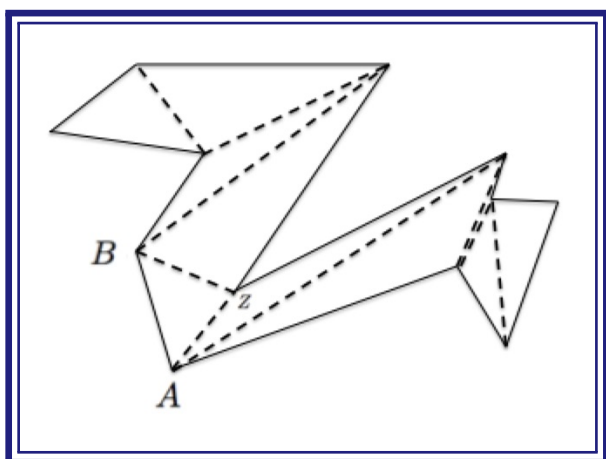
^{۱۰} مترجمین: برای اثبات از استقرای قوی استفاده شده است.

^{۱۱} Pigeonhole principle



شکل ۲۶: چندضلعی ۱۲ رأسی: مرحله ۱ مثلث‌بندی [۲]

با استفاده از این اولین قطر، می‌توانیم چندضلعی را بیشتر مثلث‌بندی کنیم. سپس با استفاده از مثلث‌بندی، می‌توانیم رئوس چندضلعی را سه‌رنگی کنیم که نتیجه آن به شرح زیر است:



شکل ۲۷: چندضلعی ۱۲ رأسی مثلث‌بندی شده

با نگاه کردن به شکل رنگی زیر، می‌توانیم رئوس سبز رنگ را به عنوان نگهبانان انتخاب کنیم، و به این ترتیب، دست کم تعداد نگهبانان لازم برای نگهبانی از این گالری هنری را تعیین کنیم. در هر یک از مثلث‌ها یک رأس سبز وجود دارد، بنابراین هر یک از مثلث‌ها نگهبانی می‌شوند و در نتیجه کل چندضلعی نگهبانی می‌شود.

وجود خواهد داشت، که در این حالت مجموع زوایای داخلی دست کم $(n-1) \times 180^\circ$ خواهد بود، که بزرگتر از $(n-2) \times 180^\circ$ است و بنابراین تناقض است. اگر دقیقاً دو رأس محدب وجود داشت، دقیقاً $n-2$ رأس غیرمحدب وجود داشت، که در این حالت مجموع زوایای داخلی دست کم $(n-2) \times 180^\circ$ خواهد بود، درحالی که دو رأس باقی‌مانده باید درجه‌ای بزرگتر از صفر داشته باشند. بنابراین، این نیز بزرگتر از $(n-2) \times 180^\circ$ خواهد بود، که تناقض است. اما با سه رأس محدب، $n-3$ رأس غیرمحدب وجود دارد که مجموع زوایای آن‌ها حداقل $(n-3) \times 180^\circ$ است. در این حالت، برای ۳ رأس محدب باقی‌مانده، حداقل 180° باقی می‌ماند که معتبر است. بنابراین، باید حداقل سه رأس محدب وجود داشته باشد.

اکنون یکی از رئوس محدب چندضلعی را انتخاب کرده و یک قطر با اتصال دو رأس همسایه آن ایجاد کنید. اگر این قطر به‌طور کامل در داخل چندضلعی قرار گیرد، همان قطری است که به دنبال آن هستیم. اما اگر این قطر به‌طور کامل در داخل چندضلعی قرار نگیرد، آن را به سمت رأس محدب «می‌لغزانیم» تا به اولین رأسی^{۱۲} برسد که با آن برخورد می‌کند. سپس، یک قطر بین رأس محدب و این رأس جدید ایجاد می‌کنیم. این موضوع در مثالی که رأس A رأس محدب است، با جزئیات بیشتر توضیح داده شده است (شکل ۲۶). اکنون که قطر را پیدا کردیم، می‌توانیم استقرا را اعمال کنیم تا بقیه چندضلعی را مثلث‌بندی کنیم و در نتیجه اثبات می‌شود که مثلث‌بندی برای چندضلعی‌های مسطح همیشه وجود دارد [۱]. □

مثال: اجازه دهید اکنون روش‌های مثلث‌بندی و رنگ‌آمیزی رأس‌ها را که در بالا جزئیات آن‌ها ارائه شد، بر روی یک گالری نمونه از کتاب [۱] در صفحه ۲۶۷ اعمال کنیم. با گراف ۲۶ شروع می‌کنیم: جایی که رأس A ، رأس محدب است و یک قطر بین دو همسایه‌اش B و C ایجاد می‌شود. با این حال، قطر به‌طور کامل در داخل چندضلعی قرار ندارد، بنابراین قطر را حرکت می‌دهیم تا به اولین رأسی که به آن می‌رسد، یعنی Z ، برسد. در نتیجه، یک قطر از A به Z ایجاد می‌کنیم.

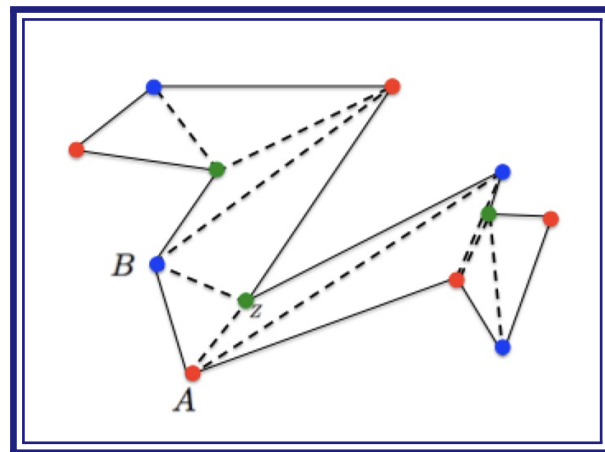
^{۱۲} مترجمین: این مورد باید آخرین رأسی باشد که پاره‌خط مربوطه قطع می‌کند، زیرا فقط آخرین رأسی که با پاره‌خط برخورد دارد این تضمین را می‌دهد که اتصال رأس محدب به آن رأس؛ کاملاً داخل چندضلعی قرار می‌گیرد و در نتیجه یک قطر است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای اثبات، قضیه ۱۰.۳ از کتاب زیر را ببینند: M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, and M. Overmars, Computational Geometry: Algorithms and Applications, 3rd Edition, Springer, 2008.

مستطیلی و k^2 دندان^{۱۷} که به ضلع پایین این مستطیل متصل شده است. با استفاده از این ساختار کلی، می‌توانیم یک چندضلعی P را با مختصات زیر بسازیم:

$[(0, 1), (1, 0), (2, 1), (4, 2), (5, 0), (6, 1), \dots, (4k^2 - 4, 1), (4k^2 - 3, 0), (4k^2 - 2, 1), (4k^2 - 2, 2k - 2), (0, 2k - 2)]$.
ناحیه مستطیلی دارای گوشه‌های $(0, 1)$ ، $(4k^2 - 2, 1)$ ، $(4k^2 - 2, 2k - 2)$ ، $(0, 2k - 2)$ است.

اکنون باید تعیین کنیم کجا می‌توانیم نگهبانان را در این چندضلعی قرار دهیم تا کل چندضلعی نگهبانی شود. نگهبانانی را که مختصات $y < 1$ دارند، نگهبانان رأسی^{۱۸} و آن‌هایی را که $y \geq 1$ دارند، نگهبانان بدنه^{۱۹} تعریف می‌کنیم. به‌طور شهودی، نگهبانان رأسی می‌توانند بالای یک دندان منفرد شانه قرار گیرند، به‌طوری‌که فقط از آن دندان نگهبانی می‌کنند. با این حال، این کار منجر به تعداد زیادی نگهبان همپوشان می‌شود و در نتیجه، عدد نگهبانی رنگی را افزایش می‌دهد، در حالی که هدف ما کمینه کردن آن است. هدف این است که نگهبانان رأسی را به گونه‌ای قرار دهیم که تداخلی نداشته باشند و در نتیجه بتوانند از بیش از یک دندان نگهبانی کنند و به این ترتیب عدد نگهبانی رنگی را به حداقل برسانیم. فرض کنید یک نگهبان رأسی در مرکز دندان^{۲۰} $(1, 0)$ قرار گیرد؛ در این صورت، دامنه دید آن توسط پرتویی که از دیوار سمت راست آن دندان امتداد می‌یابد، محدود می‌شود. این پرتو، با استفاده از مثلثات پایه، در فاصله $2k - 2$ از مرکز دندان (زاویه از مرکز دندان 45° درجه و ارتفاع $2k - 2$ است) با یال بالای ناحیه مستطیلی برخورد می‌کند. این همچنین بدان معناست که نزدیک‌ترین نگهبان همپوشان نیز قادر خواهد بود در طول افقی $2k - 2$ نگهبانی کند و بنابراین در مرکز دندان‌های با فاصله $4k - 4$ دورتر متمرکز خواهد بود. بنابراین، دو نگهبان در صورتی با هم همپوشانی خواهند داشت که فاصله بین دندان‌های متناظر آن‌ها حداکثر $4k$ باشد. سپس، «دندان‌های متوالی» را به‌عنوان مجموعه‌ای از دندان‌ها تعریف می‌کنیم که حداکثر فاصله بین هر دو نقطه رأسی متناظر با هر دو دندان، $4k$ باشد. سپس، m_{apex} را حداکثر تعداد نگهبانان رأسی در هر مجموعه متوالی از k دندان (شکل ۲۹) تعریف می‌کنیم.

از سوی دیگر، نگهبانان بدنه قادرند از حداکثر k دندان متمایز نگهبانی کنند، زیرا دو نگهبان غیرهمپوشان باید دست‌کم $4k$ فاصله از هم داشته باشند و دندان‌ها، همان‌طور که پیش‌تر در ساختار شانه



شکل ۲۸: چندضلعی ۱۲ رأسی سه‌رنگ‌آمیزی شده

مسئله گالری هنری رنگی

یک نگارش از مسئله گالری هنری که نشأت گرفته از روش رنگ‌آمیزی رنگین^{۱۳} شرح داده شده در بخش ۲ است، مسئله گالری هنری رنگی^{۱۴} نام دارد. با داشتن یک مجموعه از رئوس S ، از یک چندضلعی محدب P و مناطق دید برای هر رأس (نگهبان)، هدف تعیین کمترین تعداد رنگ‌های لازم است به گونه‌ای که هیچ دو نگهبانی که مناطق دید آن‌ها همپوشانی دارند، رنگ مشترکی نداشته باشند. حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی این مجموعه با $C(S)$ نمایش داده می‌شود. منطقه دید یک رأس v ($V(v)$) شامل تمام نقاط p در داخل چندضلعی است به طوری که p از v قابل مشاهده باشد. بنابراین، دو رأس u و v در صورتی همپوشان در نظر گرفته می‌شوند که $V(u) \cap V(v) \neq \emptyset$. حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی یک مجموعه نگهبانی، در میان همه مجموعه‌های رئوس چندضلعی، $T(P)$ به صورت $\chi_G(P) = \min_{S \in T(P)} C(S)$ تعریف می‌شود. این مقدار، عدد نگهبانی رنگی^{۱۵} چندضلعی P نامیده می‌شود [۳].

قضیه ۲. برای هر عدد صحیح مثبت k یک چندضلعی P با $3k^2 + 2$ رأس وجود دارد به طوری که $\chi_G(P) \geq k$.

اثبات. این اثبات را با در نظر گرفتن یک چندضلعی به نام شانه استاندارد^{۱۶} آغاز می‌کنیم که معمولاً برای نشان دادن لزوم وجود $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان در برخی مواقع در مسئله گالری هنری اصلی استفاده می‌شود. این چندضلعی شامل $3k^2 + 2$ رأس است، به طوری که یک ناحیه

^{۱۳}Chromatic coloring Guards

^{۱۴}Chromatic art gallery Problem

^{۱۵}Chromatic guard number

^{۱۶}Standard Comb

^{۱۷}Teeth

^{۱۸}Apex Guards

^{۱۹}Body

کران‌های بالا برای مسئله نگهبانی رنگی

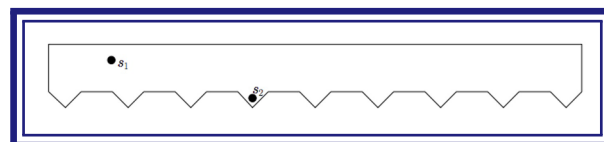
علاوه بر تعیین کران پایین برای عدد نگهبانی رنگی که در بالا به تفصیل شرح داده شد، اریکسون و لاواله نیز کران‌های بالایی را برای عدد نگهبانی رنگی تعیین کردند. کران بالایی بدیهی برای یک چندضلعی n -رأسی، $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ است؛ زیرا $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان همیشه برای نگهبانی از چندضلعی کافی است (همان‌طور که در بخش ۱.۲ اثبات شد)، که در این حالت هر نگهبان با یک رنگ منحصر به فرد رنگ‌آمیزی می‌شود. با این حال، بسیاری از چندضلعی‌ها با تعداد زیادی رأس وجود دارند که عدد نگهبانی رنگی آن‌ها ۲ است، از این رو این کران رضایت‌بخش نیست. از این رو، اریکسون و لاواله کران‌های بهتری را برای چندضلعی‌های مارپیچ^{۲۰} اثبات کردند.

چندضلعی مارپیچ، یک چندضلعی است که دقیقاً یک زیرزنجیره بازتابی ماکسیمال^{۲۱}، زنجیره‌ای که «بخشی از مرز یک چندضلعی را تشکیل می‌دهد و در آن همه رئوس داخلی دارای زاویه داخلی بزرگ‌تر از π رادیان هستند»، دارد [۳].

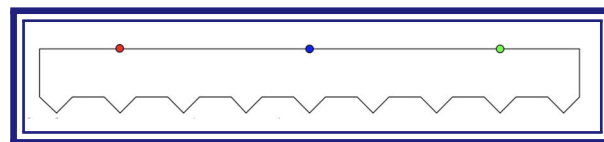
قضیه ۳. برای هر چندضلعی مارپیچ P ، $\chi_G(P) \leq 2$.

اثبات این قضیه نسبتاً پیچیده است، بنابراین ما ایده‌های کلی آن را برجسته می‌کنیم. براساس تعریف چندضلعی مارپیچ، دقیقاً یک زیرزنجیره بازتابی^{۲۳} و یک زیرزنجیره محدب^{۲۴} وجود دارد. علاوه بر این، نگهبانان در امتداد یال‌های زیرزنجیره محدب قرار داده می‌شوند. اولین نگهبان در ابتدای زیرزنجیره محدب قرار می‌گیرد. دید این نگهبان توسط دورترین نقطه در جهت ساعتگرد در امتداد زیرزنجیره محدب، p_n ، و دورترین نقطه در جهت پادساعتگرد در امتداد زیرزنجیره بازتابی، b_n ، تعیین می‌شود. سپس فرض کنید g_n اولین رأس در جهت ساعتگرد از b_n باشد، و r_n نقطه‌ای باشد که با g_n و b_n بر روی زیرزنجیره محدب هم‌خط است. بنابراین، نگهبان بعدی در زیرزنجیره محدب در فاصله‌ای بین p_n و r_n قرار داده می‌شود. یک مثال از این روش، که در مقاله اریکسون و لاواله [۳] به تفصیل آمده است، در زیر نشان داده شده است.

تعریف شد، در فاصله ۴ از هم قرار دارند. منطقه دید یک نگهبان بدنه شامل کل ناحیه مستطیلی چندضلعی است و از آنجایی که منطقه دید هر نگهبان رأسی نیز شامل ناحیه مستطیلی است، همه نگهبانان بدنه با همه نگهبانان دیگر در چندضلعی همپوشانی خواهند داشت. ما m_{body} را به عنوان تعداد نگهبانان بدنه استفاده شده در یک مجموعه نگهبانی از چندضلعی (س۱ در شکل ۲۹) تعریف می‌کنیم.



شکل ۲۹: برای یک چندضلعی با ۹ دندانه ($k = 3$)، نقطه s_1 یک نگهبان رأس و نقطه s_2 یک نگهبان بدنه است.



شکل ۳۰: این یک چندضلعی با ۹ دندانه ($k = 3$) است که با توجه به محل قرارگیری نگهبانان، به سه رنگ نیاز دارد.

حال، فرض کنید چندضلعی P دارای یک مجموعه نگهبانی S باشد که تنها به $\chi_G(P)$ رنگ نیاز دارد. اگر ما k دندانه متوالی را در P با m_{apex} نگهبان رأسی در نظر بگیریم، در این صورت همه نگهبانان رأسی با یکدیگر همپوشانی خواهند داشت و همچنین هر یک از آن‌ها با تمام m_{body} نگهبان بدنه نیز همپوشانی خواهند داشت. بنابراین، این بدان معناست که $\chi_G(P) \geq m_{apex} + m_{body}$. همان‌طور که پیش‌تر تعریف شد، هر نگهبان بدنه می‌تواند حداکثر از k دندانه نگهبانی کند و در کل، k^2 دندانه وجود دارد، بنابراین، بنا بر اصل لانه کبوتری نگهبانان رأسی می‌توانند حداکثر km_{apex} دندانه را نگهبانی کنند. علاوه بر این، هر دندانه باید نگهبانی شود، لذا

$$km_{apex} + km_{body} \geq k^2 \Rightarrow m_{apex} + m_{body} \geq k.$$

بنابراین، $\chi_G(P) \geq m_{apex} + m_{body} \geq k$ ، یعنی عدد نگهبانی رنگی چندضلعی P دست کم k است [۳]. یک مثال از این رنگ‌آمیزی در شکل ۳۰ نشان داده شده است. □

^{۲۲} یک اثبات کامل در مقاله اریکسون و لاواله [۳] قابل مشاهده است.

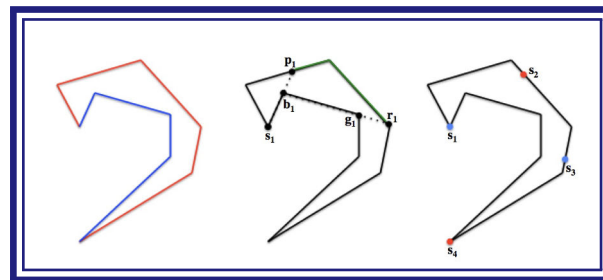
کوتاه‌ترین مسیر است. بنابراین، این مسئله نه تنها بر مفهوم هندسی دید، بلکه بر ارائه یک الگوریتم بهینه‌سازی نیز تمرکز دارد. اولین الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر دیده‌بان توسط کارلسون، جانسون و نیلسون ارائه شد [۲].

اصطلاحات و روش‌های کلیدی

پیش از ارائه الگوریتم، مفهوم مسیر دیده‌بانی ثابت و زیر-رویه‌های کلیدی لازم برای درک الگوریتم را معرفی می‌کنیم. اجازه دهید ابتدا یک مسیر دیده‌بانی ثابت تعریف کنیم، که یک مسیر دیده‌بانی است که از یک نقطه ثابت d روی مرز چندضلعی عبور می‌کند. دو روش برای حل مسئله مسیر دیده‌بانی ثابت، برش‌های ضروری^{۲۶} و اصول بازتاب^{۲۷} هستند.

برش، یک پاره‌خط جهت‌دار در چندضلعی است به‌طوری‌که بخشی از فضای داخلی برش باید در داخل چندضلعی قرار گیرد (یال‌های چندضلعی برش نیستند) و برش، چندضلعی را به دو زیرچندضلعی تقسیم کند. برش توسعه^{۲۸} نوع خاصی از برش است که با امتداد دادن دو یال متصل در یک رأس، تا رسیدن به یک نقطه مرزی در داخل چندضلعی تعریف می‌شود. با بررسی یک مسیر تعریف‌شده توسط چنین برش‌هایی، بدیهی است که همه مجموعه‌های نگهبانی باید نقطه‌ای روی هر برش توسعه یا در سمت چپ آن داشته باشند، در غیر این صورت تمام یال‌های هم‌خط با برش‌ها توسط مجموعه نگهبانی دیده نخواهند شد. با استفاده از این مفهوم، می‌توانیم برش‌های ضروری را تعریف کنیم که برش‌های توسعه‌ای هستند که تحت سلطه^{۲۹} هیچ برش توسعه دیگری قرار ندارند. یک برش توسعه بر برش توسعه دیگر سلطه دارد، اگر همه نقاط در چندضلعی که در سمت چپ یک برش قرار دارند، در سمت چپ برش دیگر نیز قرار داشته باشند [۲].

برش‌های ضروری برای تعریف اصل بازتاب استفاده می‌شوند، که بیان می‌کند کوتاه‌ترین مسیر دیده‌بانی تنها می‌تواند در برش‌های ضروری و در رؤس چندضلعی خم شود (همانطور که توسط چین و انتافوس ثابت شد^{۳۰}). اگر نقطه خم شدن^{۳۱} روی یک برش ضروری حرکت داده شود، در حالی که نقاط خم شدن دیگر ثابت بمانند، مسیر طولانی‌تر می‌شود و اگر نقطه خم شدن در فضای داخلی برش باشد، در این صورت یال‌های ورودی و خروجی بازتاب یکدیگر هستند. اما اگر نقطه خم شدن در انتهای برش باشد، یال خروجی توسط امتداد



چپ: پاره‌خط قرمز زیرزنجیره محدب و پاره‌خط آبی زیرزنجیره بازتابی است. وسط: اولین نگهبان در s_1 قرار داده شده و از ناحیه‌ای تا خط نقطه‌چین متصل کننده p_1 و b_1 نگهبانی می‌کند. نقاط p_1 ، b_1 ، g_1 و r_1 طبق روشی که پیش‌تر به تفصیل شرح داده شد، علامت‌گذاری شده‌اند. پاره‌خطی که s_2 می‌تواند در آن قرار گیرد، به رنگ سبز مشخص شده است. راست: ادامه این روش، منجر به قرارگیری چهار نگهبان می‌شود که با s_i (برای هر $i \in [1, 4]$) مشخص شده‌اند. سپس نگهبانان به ترتیب با توجه به اندیس فرد یا زوج بودن آن‌ها، آبی یا قرمز رنگ‌آمیزی می‌شوند.

اریکسون و لاواله پس از تکمیل این روش برای قرار دادن نگهبانان، اثبات می‌کنند که این کار منجر به یک مثلث‌بندی از چندضلعی می‌شود. سپس، از آنجا که تمام نگهبانان در امتداد زیرزنجیره محدب قرار می‌گیرند، اگر دو نگهبان با هم همپوشانی داشته باشند، نواحی نگهبانی‌شده آن‌ها باید در جایی در امتداد زیرزنجیره محدب اشتراک داشته باشند. با این حال، s_{n-1} و s_{n+1} نمی‌توانند با یکدیگر همپوشانی داشته باشند، در غیر این صورت s_n بر روی زیرزنجیره محدب قرار نمی‌گرفت. در نهایت، نگهبانان را می‌توان بر اساس اندیس آن‌ها رنگ‌آمیزی کرد؛ به‌طوری‌که همه نگهبانان با اندیس زوج یک رنگ، و همه نگهبانان با اندیس فرد رنگ دیگری داده شوند [۳].

مسئله مسیر دیده‌بان

یک توسعه دیگر از مسئله اصلی گالری هنری، تعدیل محدودیت‌ها به‌گونه‌ای است که نگهبان‌ها اکنون متحرک هستند، که این مسئله نخستین بار در سال ۱۹۸۱ توسط توسان و اوایس با عنوان مسئله مسیر دیده‌بانی^{۲۵} معرفی شد. یک مسیر دیده‌بان W برای یک چندضلعی P ، به صورت یک منحنی در داخل P تعریف می‌شود به‌طوری‌که W از P نگهبانی می‌کند. هدف از این مسائل، یافتن مسیر دیده‌بانی بهینه است که تمام چندضلعی را پوشش دهد، که در آن مسیر بهینه،

²⁵The Watchman Route Problem ²⁶Essential cuts ²⁷Reflection principles ²⁸Extension cut ²⁹Dominated ³⁰W. Chin and S. C. Ntafos. Shortest watchman routes in simple polygons. Discrete Computational Geometry, 6:9-31, 1991. ³¹Bend point

برنامه‌های خودمختار که ربات‌ها را در فضاهای بسته هدایت می‌کنند، ایفا کرده است. این مسئله با تغییر محدودیت‌های مسئله اصلی، از جمله رنگ‌آمیزی رنگین نگهبانان و یافتن کوتاه‌ترین مسیری که از گالری نگهبانی می‌کند، الهام‌بخش تحقیقات زیادی در این زمینه بوده است. مسئله گالری هنری رنگی می‌تواند در رباتیک با کمک به توسعه برنامه‌هایی که از تداخل و برخورد ربات‌های متحرک در فضاهای بسته‌ای که آن‌ها را تحت نظر دارند جلوگیری می‌کند، به کار رود؛ در نتیجه، فضای تحت پوشش آن‌ها بهینه شده و احتمال برخورد محدود می‌شود. الگوریتم‌های توسعه‌یافته برای رباتیک که از مسئله مسیر دیده‌بانی نشأت می‌گیرند، الگوریتم‌های تعقیب و گریز^{۳۳} هستند. این الگوریتم‌ها می‌توانند کاربردهای متعددی در وظایف دستگیری یا بازیابی داشته باشند، که برخی از آن‌ها قابل اجرا در محیط‌های نظامی و پزشکی هستند. بنابراین، اگرچه مسئله گالری هنری یک مسئله نسبتاً ساده بیان شده است، اما تکامل یافته و به یک پایه قوی و الهام‌بخش برای حل مسائل پیچیده‌تر تبدیل شده است که روزی می‌توانند در سیستم‌های خودمختار به کار گرفته شوند.

*Chesnokov, N. (2018). The Art Gallery Problem: An Overview and. Extension to Chromatic Coloring nad Mobile Guards.

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M. (2004). Proofs from the book (4th ed.). Berlin: Springer.

[2] Carlsson, S., Jonsson, H., Nilsson, B. J. (1993). Finding the shortest watchman route in a simple polygon. Algorithms and Computation Lecture Notes in Computer Science, 22(3), 58-67. doi:10.1007/3-540-57568-5 235

[3] Erickson, L.H., LaValle, S.M. (2010). A chromatic art gallery problem.

[4] Safak, G. (2009). The Art-Gallery Problem: A Survey and an Extension (Master's thesis, Royal Institute of Technology, 2009). Sweden: KTH Computer Science and Communication

یال ورودی و بازتاب امتداد در عرض برش محدود می‌شود [۲]. کارلسون، جانسون و نیلسون [۲] پس از معرفی اصطلاحات و زیر-رویه‌های کلیدی، لم زیر را بدون اثبات بیان می‌کنند:

لم ۱. یک منحنی بسته، مسیر دیده‌بانی است اگر و تنها اگر آن منحنی دست‌کم یک نقطه در سمت چپ (یا روی) هر برش ضروری داشته باشد.

با استفاده از این لم و اصطلاحات تعریف‌شده در بالا، مسئله مسیر دیده‌بانی را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد: «کوتاه‌ترین منحنی بسته‌ای را محاسبه کنید که تمام برش‌های ضروری را قطع کند».

قضیه ۴. // الگوریتمی وجود دارد که با داشتن یک نقطه مرزی d در یک چندضلعی ساده با n یال، برش‌های ضروری عقب‌رو نسبت به d و تقسیم‌بندی آن‌ها به قطعات، کوتاه‌ترین مسیر دیده‌بانی ثابت‌گذرنده از d را در زمان $O(n|C|F)$ و حافظه $O(n|C|)$ محاسبه می‌کند، که در آن $|C|$ تعداد برش‌های ضروری و F تعداد قطعات است.

الگوریتم

الگوریتمی که طبق قضیه ۴ در زمان $O(n|C|F)$ اجرا می‌شود، پیچیده است و اساس مقاله کارلسون، جانسون و نیلسون را تشکیل می‌دهد، بنابراین ما تنها یک نمای کلی از الگوریتم ارائه خواهیم داد. ایده کلی الگوریتم این است که کوتاه‌ترین مسیرهای نگهبان ثابت که در نقاط انتهایی قطعات بازتاب ایجاد می‌کنند را از پیش محاسبه کنیم. با این حال، این امر می‌تواند منجر به حالتی شود که مسیرها تنها بازتاب‌های کاملی (بازتاب‌هایی که زاویه ورودی برابر با زاویه خروجی بازتاب است) را در فضای داخلی قطعات ایجاد کنند. برای حل این مشکل، از روشی به نام لغزش^{۳۳} استفاده می‌شود که حرکت یک نقطه بازتاب را هنگام جابجایی بین دو نقطه انتهایی یک قطعه فعال (قطعه‌ای که شامل نقاط تقاطع مسیر و برش است) شبیه‌سازی می‌کند. توضیحات دقیق‌تر رویه لغزش را می‌توان در بخش ۴.۴ مقاله کارلسون، جانسون و نیلسون [۲] مشاهده کرد.

نتیجه‌گیری

مسئله گالری هنری نقش اساسی در توسعه الگوریتم‌هایی برای ایجاد

** دانشگاه یزد