از ذرات نیوتنی تا سیالات: گامی تازه در حل مسئلهٔ ششم هیلبرت

خدیجه ندایی اصل * **و علی نجفی** **

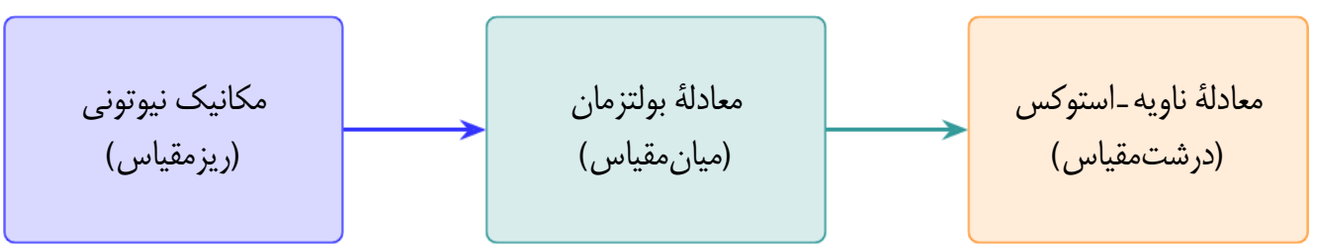
در سال ۲۰۲۶، مدال فیلدز به چهار ریاضی‌دان برجسته اهدا شد: یو دنگ[۱]، جان پردن[۲]، جیکوب تسیمِرمن[۳] و هونگ وانگ[۴]. به‌گفتهٔ اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات، این انتخاب به پاس «عمق، اصالت و پویایی» کارهای آنان در ریاضیات معاصر انجام شد. در میان برگزیدگان، یو دنگ به‌طور ویژه برای کارهایش در معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز استخراج دقیق معادلهٔ بولتزمن از سامانهٔ کره‌های سخت مورد توجه قرار گرفت؛ کاری که از نظر ریاضی و فیزیکی اهمیت زیادی دارد و به مسئلهٔ گذار از دینامیک ریزمقیاس به رفتار درشت‌مقیاس سیالات مربوط می‌شود.

مسئلهٔ ششم هیلبرت و رؤیای ریاضی‌سازی فیزیک

در آغاز قرن بیستم، دیوید هیلبرت آرزوی بزرگی در سر داشت تا شیوهٔ تفکر دقیق‌تر و ریاضی‌محورتری را وارد دنیای فیزیک کند. در آن زمان، فیزیک‌دانان هنوز گرفتار بحث و جدل‌هایی بر سر تعاریف پایه بودند - گرما چیست؟ ساختار مولکول‌ها چگونه است؟ - و هیلبرت امیدوار بود که منطق صوری ریاضیات بتواند در این زمینه راهگشا باشد. در صبح روز ۸ اوت ۱۹۰۰، او فهرستی از ۲۳ مسئلهٔ کلیدی ریاضی را به کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان ارائه کرد [۷]. از این بین، مسئلهٔ ششم او عبارت بود از ارائهٔ اثبات‌های قطعی و خلل‌ناپذیر برای قوانین فیزیک. او می‌خواست با استفاده از اصول موضوعه، به آن دسته از علوم فیزیکی که ریاضیات در آن‌ها نقش مهمی ایفا می‌کند، پرداخته شود.

هیلبرت نقطهٔ شروعی را ارائه کرد که چگونه می‌توان به روشی ریاضی و دقیق، از حرکت تک‌تک مولکول‌ها در یک گاز، رفتار کلی و کلان آن گاز را استخراج کرد. هوا و سایر گازها از مولکول‌های بسیار زیاد تشکیل شده‌اند (یک مول از یک ماده، حاوی $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ واحد از واحدهای بنیادی آن ماده (اتم، مولکول یا یون) است). در توصیف سامانه‌های فیزیکیِ چندذره‌ای، به‌ویژه گازها، معمولاً سه سطح توصیف از یکدیگر تفکیک می‌شوند: ریزمقیاس[۵]، میان‌مقیاس[۶] و درشت‌مقیاس[۷] [۱۰].

در ریزمقیاس، سامانه بر حسب مکان و سرعت تک‌تک ذرات توصیف می‌شود و دینامیک آن تابع قوانین مکانیک نیوتنی است. در میان‌مقیاس، به‌جای دنبال کردن هویت و مسیر هر ذره، رفتار آماری جمعیت ذرات با تابع توزیع $f(t,x,v)$ توصیف می‌شود؛ معادلهٔ بولتزمان نمونهٔ شاخص این سطح است. در درشت‌مقیاس گاز به‌صورت یک محیط پیوسته درنظر گرفته می‌شود و تنها کمیت‌های میانگین‌گیری‌شده‌ای مانند چگالی، سرعت، فشار و دما مورد توجه قرار می‌گیرند؛ معادلات اویلر و ناویه–استوکس در این سطح قرار دارند. بنابراین گذار از ریزمقیاس به درشت‌مقیاس گذار از توصیف کامل ذره‌ای به توصیف آماری و سپس به توصیف پیوسته و میانگین‌گیری‌شده است.



شکل ۱: **نمودار مقیاس‌های مدل‌سازی جریان (ریزمقیاس، میان‌مقیاس و درشت‌مقیاس)**

[1] Ye Deng [2] John Pardon [3] Jacob Tsimerman [4] Hong Wang [5] Microscopic [6] Mesocopic [7] Macroscopic

وظیفهٔ ریاضی‌دانان این بود که زنجیرهٔ این مدل‌ها را به‌طور دقیق استخراج و اثبات کنند: یعنی حرکت را از مکانیک نیوتنی آغاز کرده، از معادلهٔ بولتزمان عبور داده و در نهایت به معادلات ناویه-استوکس برسند. دیدگاه ریزمقیاس، دیدگاهی غنی‌تر از دیدگاه درشت‌مقیاس است. به طور منطقی انتظار داریم معادلات درشت‌مقیاس مانند ناویه-استوکس به صورتی از معادلات ریزمقیاس (مثلاً معادلهٔ نیوتن برای تک‌تک ذرات) به‌دست آید. در فیزیک کلاسیک، مسیر بالا یک مسیر استاندارد است که در اغلب کتاب‌های مکانیک آماری توضیح داده شده است [۸].

مانع اصلی: برخوردهای مجدد و محدودیت نتایج لانفورد

در مسیر توصیف‌شده در بخش پیش ناچاریم فرض‌هایی بپذیریم که صحت آن‌ها را با مشاهدات و داده‌های تجربی می‌سنجیم. مثلاً فرض زمان برخورد، یک فرض اساسی در استخراج معادلهٔ بولتزمان است. با پذیرفتن این فرض، معادلات نیوتن ذره‌ای به معادلهٔ ناویه-استوکس می‌رسند. لذا فیزیک‌دانان این سه مدلِ متفاوت از رفتار گاز را با یکدیگر سازگار می‌دانند؛ این‌ها صرفاً دریچه‌های متفاوتی برای درک یک پدیدهٔ واحد هستند. اما ریاضی‌دانان می‌خواستند این موضوع را به شکل دقیقِ ریاضی اثبات کنند. آن‌ها باید نشان می‌دادند که مدل نیوتن برای ذرات منفرد، توصیف آماری بولتزمان را پدید می‌آورد و معادلهٔ بولتزمان نیز به نوبهٔ خود به معادلات ناویه–استوکس منجر می‌شود. ریاضی‌دانان در گام دوم موفقیت‌هایی به دست آورده و ثابت کرده یودند که در شرایط مختلف، می‌توان یک مدل درشت‌مقیاس گاز را از مدل میان‌مقیاس آن استخراج کرد. اما نتوانستند گام اول را حل کنند و درنتیجه، این زنجیره منطقی ناقص ماند. اکنون این وضعیت تغییر کرده است. در مجموعه‌ای از مقالات، سه ریاضیدان به نام‌های یو دِنگ، ظاهر هانی[1] و شیائو ما[2]، گام دشوارترِ گذار از ریزمقیاس به میان‌مقیاس را برای گازی در یکی از این شرایط اثبات کردند و برای نخستین بار این زنجیره را کامل نمودند [۵، ۶].

بولتزمان پیش از این نشان داده بود که تا زمانی که یک فرض حیاتی صادق باشد، قوانین حرکت نیوتن به معادله میان‌مقیاس او منجر می‌شوند: اینکه ذرات درون گاز کم و بیش مستقل از یکدیگر حرکت می‌کنند. به‌عبارت دیگر، باید بسیار بعید و نادر باشد که یک جفت مولکول خاص چندین بار با یکدیگر برخورد کنند. در سال ۱۹۷۵، ریاضی‌دان آمریکایی اسکار لنفورد[3] برای نخستین بار موفق شد معادلهٔ بولتزمان را از مکانیک نیوتنی استخراج کند [۹]. با این حال، نتیجهٔ کار او تنها برای زمان‌های بسیار کوتاه مقیاس معتبر بود. با گذشت زمان، ذرات برخوردهای مکرری انجام می‌دادند و اثرات آن‌ها در یکدیگر گره می‌خورد؛ به‌طوری که اثبات اعتبار این روند برای زمان‌های طولانی با روش‌های موجود ناممکن بود. مانع اصلی در این مسیر، «برخوردهای مجدد»[4] بود. برای اینکه معادلهٔ بولتزمان صادق باشد، بیشتر ذرات باید اساساً مستقل از یکدیگر حرکت کنند. اما در زمان‌های طولانی، احتمال اینکه ذرات یکسانی بارها و بارها با هم ملاقات کرده و برخورد کنند، بسیار بالا می‌رود. در این حالت، از نظر تئوری، باید ردیابی شود که کدام ذرات، چه زمانی و با چه ذره‌ای برخورد کرده‌اند و چگونه اثر یک برخورد به برخوردهای دیگر سرایت می‌کند. ریاضی‌دانان برای دهه‌ها نتوانسته بودند این مسئله را حل کنند.

دستاورد دنگ، هانی، و ما: کامل شدن زنجیرهٔ ریزمقیاس تا درشت‌مقیاس

در سال ۲۰۱۹، هانی و تعدادی از همکارانش اثبات کردند [۱] که معادلهٔ شرودینگر در مقیاس‌های زمانی کوتاه به معادلهٔ جنبشی موج همگرا می‌شود. اما در مقیاس‌های زمانی طولانی‌تر، امواج فرصت این را پیدا می‌کنند که به روش‌های بسیار پیچیده‌تری با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند. تا اینکه هانی با کمک ایدهٔ کلیدی دنگ دربارهٔ داده‌های تصادفی، موفق شد محدودیت‌های زمانیِ اثبات همگرایی معادلات شرودینگر را تا نزدیکی مرزهای مدنظر فیزیک‌دانان پیش ببرد [۲]. در سال ۲۰۲۳ دِنگ و هانی تحلیلی از گذار از ریزمقیاس به درشت‌مقیاس در بستر امواج ارائه دادند [۳، ۴]. حدود یک سال پیش از آن که این ریاضی‌دانان مقالهٔ خود را در اینترنت منتشر کنند، دِنگ در یک کنفرانس حضور داشت و در آنجا با یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی از دانشگاه پرینستون به نام شیائو ما ملاقات کرد. آن‌ها در نهایت درباره کار دِنگ و هانی و اینکه چگونه می‌توانند آن روش‌ها را با ذرات تطبیق دهند، به گفت‌وگو پرداختند. انجام این کار به آن‌ها اجازه می‌داد تا نتیجه لانفورد را بسط دهند – یعنی نشان دهند که برخوردهای مجدد ذرات حتی در بازه‌های زمانی طولانی‌تر نیز نادر است.

این ایده‌ای بود که دِنگ و هانی از قبل به آن فکر کرده بودند. دِنگ که تحت تأثیر بینش‌های «ما» در این موضوع قرار گرفته بود، از

[1] Zaher Hani [2] Xiao Ma [3] Oscar Lanford [4] Recollision

او دعوت کرد تا برای تبدیل شهودشان به یک اثبات ریاضی به آن‌ها کمک کند. این سه نفر امیدوار بودند روی سناریویی که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته تمرکز کنند؛ سناریویی که در آن ریاضی‌دانان پیش از این گام دوم (گذار میان به درشت‌مقیاس) در مسئله ششم هیلبرت را اثبات کرده بودند. در این سناریو، یک گاز رقیق از ذرات کروی درون یک جعبه محبوس شده است. اگر ذره‌ای به یکی از دیواره‌های جعبه برخورد کند، از دیواره مقابل دوباره ظاهر می‌شود (که از آن به شرط مرزی دوره‌ای[5] یاد می‌شود).

اما برای اثبات گام دشوارترِ ریز به میان‌مقیاس در این شرایط - و درنتیجه حل مسئلهٔ ششم هیلبرت - دِنگ، هانی و «ما» باید تکنیک‌های مبتنی بر موج خود را به ذرات منتقل می‌کردند. آن‌ها با گازی کار کردند که ذرات آن به‌طور تصادفی در یک فضای بی‌نهایت توزیع شده است؛ برخلاف ذراتِ گازِ درون جعبه که برای همیشه به برخورد با یکدیگر ادامه می‌دهند، این ذرات در نهایت پراکنده شده و از برخورد باز می‌ایستند. این سه ریاضی‌دان ابتدا باید الگوهای مختلفِ برخوردهایی را که ممکن بود در گازشان رخ دهد، و همچنین احتمال وقوع هر یک از آن الگوها را دسته‌بندی و جدول‌بندی می‌کردند. آن‌ها می‌توانستند سناریوهایی را که دارای نرخِ به‌ویژه بالایی از برخوردهای مجدد بودند، کنار بگذارند. این کار تعداد متناهی، اما همچنان بسیار زیادی از الگوها را برای تحلیل باقی گذاشت - که هر کدام شامل زیرمجموعهٔ خاصی از ذرات بود که با ترتیب مشخصی با هم برخورد می‌کردند. وقتی آن‌ها دقیقاً متوجه می‌شدند که هر الگو شامل چه اتفاقاتی است، می‌توانستند از آن اطلاعات برای تخمین احتمال وقوع آن استفاده کنند.

آن‌ها تکنیک خود را با دقت چنان طراحی کرده بودند که با بررسیِ تنها چند موج در یک زمان، همچنان می‌توانستند تخمین خوبی برای احتمال وقوعِ الگوی موجیِ کامل‌تر و پیچیده‌تر به دست آورند و امیدوار بودند که همین ایده در بستر ذرات نیز کارساز باشد. اما پس از برخورد، رفتار ذرات بسیار متفاوت از امواج است. برای مثال، ذرات برخلاف امواج، پس از برخورد به یکدیگر بازتابیده می‌شوند (پس‌زده می‌شوند) که این موضوع، الگوی نهاییِ برخوردها و احتمال وقوع آن را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. دِنگ، هانی و «ما» باید جزئیات استراتژی خود را از ابتدا بازنگری و اصلاح می‌کردند. در ابتدا، آن‌ها به سراغ ساده‌ترین حالت‌ها رفتند؛ حالت‌هایی که در آن‌ها هر ذره در یک بازهٔ زمانی بسیار کوتاه تنها چند بار برخورد می‌کند و هیچ برخورد مجددی رخ نمی‌دهد. سپس به‌تدریج به سراغ حالت‌های دشوارتر و دشوارتر رفتند — بازه‌های زمانی طولانی‌تر، با برخوردها و برخوردهای مجدد بیشتر.

این کار به همان اندازه که علم بود، هنر نیز بود. آن‌ها باید به درکی از این موضوع می‌رسیدند که چگونه الگوهای بزرگ و پیچیدهٔ برخورد ذرات را به گونه‌ای خرد و تقسیم کنند که محاسباتشان ساده شود، درحالی‌که تخمین‌هایشان همچنان بسیار دقیق باقی بماند. طولی نکشید که آنها نتیجهٔ خود را از حالت فضای بی‌نهایت به حالت محبوس در جعبه بسط دادند. در ماه مارس ۲۰۲۵، مقالهٔ جدیدی [۶] منتشر کردند که اثباتشان را با نتایج پیشین - که معادلهٔ بولتزمان را به معادلات ناویه-استوکس مرتبط می‌کرد - ترکیب می‌کرد. زنجیرهٔ منطقی کامل شده بود: نشان داده بودند که برای یک مدل واقع‌گرایانه از گاز، توصیف ریزمقیاس ذرات منفرد، در نهایت واقعاً به یک توصیف درشت‌مقیاس از رفتارِ مقیاسِ بزرگِ گاز منجر می‌شود. این کار تنها به‌معنای حل یک حالت مهم از مسئلهٔ ششم هیلبرت نبود، بلکه حل دقیق و ریاضیاتیِ یک پارادوکس قدیمی را نیز به همراه داشت. در مقیاس میکروسکوپی، جایی که ذرات مانند توپ‌های بیلیارد رفتار می‌کنند، زمان برگشت‌پذیر است. معادلات نیوتن پیش‌بینی می‌کنند که یک ذره از کجا آمده و به کجا می‌رود. در این مقیاس، آینده تفاوت بنیادینی با گذشته ندارد.

اما در سطوح میان‌مقیاس و درشت‌مقیاس هیچ بازگشتی در زمان وجود ندارد چرا که با حرکت رو به جلو در زمان، انسان پیر می‌شود؛ گرما خودبه‌خود از جسم سرد به جسم گرم منتقل نمی‌شود؛ یک قطره جوهر در یک لیوان آب پخش می‌شود و مایع را تیره می‌کند، اما خودبه‌خود به شکل کوچک و گردِ اولیهٔ خود بازنمی‌گردد. نه معادلهٔ بولتزمان و نه معادلات ناویه–استوکس، هیچ‌کدام از نظر زمانی برگشت‌پذیر نیستند؛ اگر سعی کنید زمان را به عقب برگردانید، نتایج نامعقول و بی‌معنی خواهند بود. برای هم‌عصران بولتزمان، این موضوع گیج‌کننده بود. چگونه می‌شد یک معادلهٔ برگشت‌ناپذیرِ زمانی را از یک سیستم دارای برگشت‌پذیری زمانی استخراج کرد؟ اما بولتزمان استدلال می‌کرد که هیچ پارادوکسی در کار نیست: حتی اگر تک‌تک ذرات را بتوان به روشی برگشت‌پذیرِ زمانی مدل‌سازی کرد، تقریباً همهٔ الگوهای برخورد در نهایت به پراکنده شدنِ گاز ختم می‌شوند. برای مثال، احتمال اینکه یک گاز به‌طور ناگهانی منقبض و متراکم شود،آنقدر ناچیز است که برآوردی از زمان وقوع آن نیاز به عمر عالم دارد. لانفورد پیش‌تر این شهود را از نظر ریاضیاتی برای بازه زمانیِ بسیار کوتاه خود تأیید کرده بود. اکنون نتیجهٔ دنگ، هانی،

[5] Periodic Boundary Condition

و «ما» این موضوع را برای شرایط واقع‌گرایانه‌تری تأیید می‌کند.

در ادامه، ریاضی‌دانان - که هنوز در حال بررسی دقیقِ جزئیات این اثبات جدید هستند – می‌خواهند بررسی کنند که آیا تکنیک‌های مشابه ممکن است در زمینه‌های دیگر و حتی واقع‌گرایانه‌تر نیز مفید باشند یا خیر. این موارد می‌تواند شامل گازهایی باشد که از ذراتی با اشکال متفاوت تشکیل شده‌اند، یا ذراتی که به روش‌های پیچیده‌تری با یکدیگر برهم‌کنش دارند.

اثبات ریاضیِ این زنجیره، علاوه بر اهمیت ساختاری، تبیینی دقیق برای یک پارادوکس قدیمی فیزیک یعنی «پارادوکس برگشت‌پذیری زمانی» ارائه می‌دهد. در مقیاس مقیاس‌کوچک، معادلات حرکت نیوتن نسبت به معکوس شدن زمان متقارن و برگشت‌پذیرند. اما در سطوح میان‌مقیاس و درشت‌مقیاس فرایندهایی مانند پخش شدن جوهر در آب یا انتقال گرما برگشت‌ناپذیرند و آنتروپی سیستم طبق قانون دوم ترمودینامیک افزایش می‌یابد. دستاورد ریاضی جدید به‌طور صلب نشان می‌دهد که چگونه یک رفتار برگشت‌ناپذیرِ درشت‌مقیاس به‌طور طبیعی از یک سیستمِ در مبنا برگشت‌پذیرِ نیوتنی در زمان‌های طولانی استخراج می‌شود.

با این حال، در تحلیل فیزیکی این اثبات، باید به دامنهٔ اعتبار و محدودیت‌های آن توجه داشت [۶]:

۱ مفهوم زمان برخورد در برابر زمان آزاد میانگین: در فیزیک آماری، زمان برخورد مدت‌زمانی است که دو مولکول در فاز برخورد و تحت تأثیر نیروی متقابل یکدیگر قرار دارند. زمان آزاد میانگین ، میانگین زمان بین دو برخورد پیاپی برای یک مولکول است. در اکثر گازهای رقیق واقعی، فرض اساسیِ سازگار با تجربه این است که زمان برخورد بسیار کوچک‌تر از زمان آزاد میانگین باشد.

۲ محدودیت مدل ذرات سخت[۶]: اثبات ریاضی دنگ، هانی و ما به‌طور خاص برای مدل «کره‌های سخت» انجام شده است. از نظر فیزیکی، زمان برخورد برای کره‌های سخت صفر فرض می‌شود؛ بنابراین، فرض فیزیکیِ رقیق بودن گاز به‌طور بسیار قوی در این سیستم برقرار است.

۳ عدم تعمیم مستقیم به پتانسیل‌های واقعی: در گازهای واقعی، مولکول‌ها نقاط مادی با برخورد آنی نیستند، بلکه از طریق پتانسیل‌های نرم‌تر و دوربردتر (مانند پتانسیل لنارد-جونز) با یکدیگر برهم‌کنش دارند. در این حالت، زمان برخورد غیرصفر است و دینامیک سیستم پیچیدگی‌های بیشتری دارد. از این رو، هرچند دستاورد اخیر گامی بزرگ در فیزیک ریاضی است، اما اثبات آن برای حالت‌های عمومی‌تر با پتانسیل‌های فیزیکی واقعی همچنان به‌عنوان یک مسئله باز پژوهشی مطرح است.

[1] Tristan Buckmaster, Pierre Germain, Zaher Hani, and Jalal Shatah. Onset of the wave turbulence description of the longtime behavior of the nonlinear Schrödinger equation. *Inventiones mathematicae*, 225(3):787–855, 2021.

[2] Yu Deng and Zaher Hani. On the derivation of the wave kinetic equation for NLS. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 9, page e6. Cambridge University Press, 2021.

[3] Yu Deng and Zaher Hani. Full derivation of the wave kinetic equation. *Inventiones mathematicae*, 233(2):543–724, 2023.

4] Yu Deng and Zaher Hani. Long time justification of wave turbulence theory. *arXiv preprint arXiv:2311.10082*, 2023.

[5] Yu Deng, Zaher Hani, and Xiao Ma. Long time derivation of the Boltzmann equation from hard sphere dynamics. *arXiv preprint arXiv:2408.07818*, 2024.

[6] Yu Deng, Zaher Hani, and Xiao Ma. Hilbert's sixth problem: derivation of fluid equations via Boltzmann's kinetic theory. *arXiv preprint arXiv:2503.01800*, 2025.

[7] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 437—479, 1902.

[8] Mehran Kardar. *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press, 2007.

[9] Oscar E Lanford III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical Systems, Theory and Applications: Battelle Seattle 1974 Rencontres*, pages 1–111. Springer, 2005.

[10] Laure Saint-Raymond. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*. Number 1971. Springer Science & Business Media, 2009.

* دانشکده ریاضی، انشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

**دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

[6] Hard Spheres