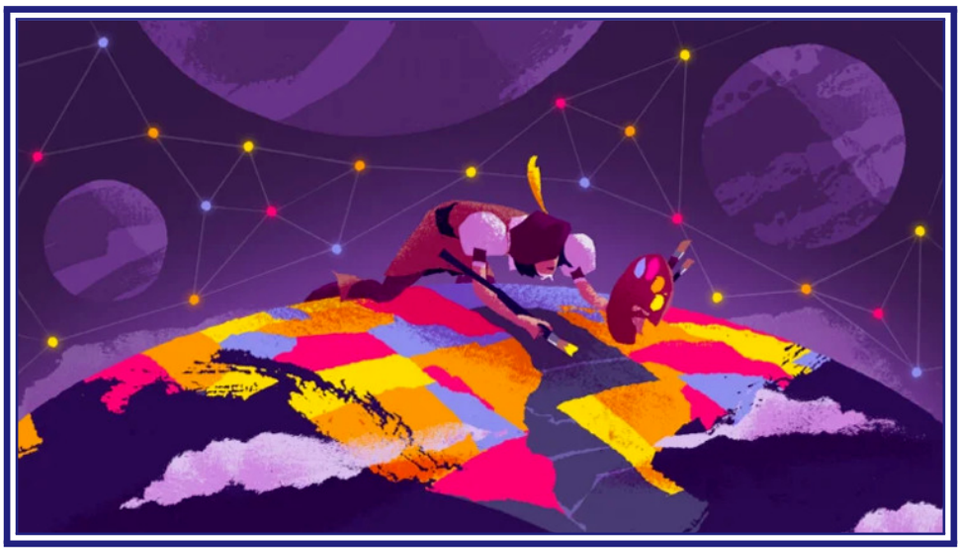
قضیه چهار رنگ اثباتی نادر و جدید پیدا می‌کند*

مترجم: مریم صفازاده**



قضیهٔ چهار رنگ به‌راحتی قابل بیان است: با داشتن یک نقشهٔ به‌هم پیوسته، آیا ممکن است هر منطقه را با یکی از چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هیچ مناطق همسایه‌ای رنگ یکسان نداشته باشند؟

با بازنگری در مسئله معروف که در دههٔ ۱۹۷۰ با کمک کامپیوترها به‌طور جنجالی حل شد، ریاضی‌دان‌ها بینش‌های جدید و مهمی دربارهٔ ماهیت گراف‌ها به‌دست آورده‌اند.

برخی از مسائل ریاضی حتی بعد از حل شدن هم، ذهن پژوهشگران را درگیر می‌کنند. یک مسئله اثبات می‌شود و حتی جشن گرفته می‌شود و با این‌حال نارضایتی باقی می‌ماند. شاید بحث خیلی پیچیده است ـ جست‌وجو برای مقالهٔ یک صفحه‌ای ادامه دارد ـ یا شاید نتوان بینش نظری عمیق‌تری دربارهٔ اینکه چرا چیزی درست است، ارائه داد. هر دلیلی که داشته باشد، ریاضی‌دان‌ها بارها و بارها به‌موردی برمی‌گردند که مدت‌هاست بسته محسوب می‌شود.

یکی از معروف‌ترین مسئله‌ها، قضیه چهار رنگ است. مسئله‌ای که طرز فکر ریاضی‌دان‌ها دربارهٔ رشته‌شان را تغییر داد. این مسئله به‌راحتی قابل بیان و حتی قابل دیدن است: با داشتن یک نقشه پیوسته، آیا ممکن است هر منطقه را با یکی از چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که مناطق همسایه رنگ یکسان نداشته باشند؟

در اواسط قرن نوزدهم، این موضوع برای نقشه‌نگاران چندان اهمیت نداشت، کسانی که بیش از چهار رنگ در اختیار داشتند و دلیل خاصی نمی‌دیدند که پالت رنگی خود را محدود کنند. اما برای ریاضی‌دان‌ها چه آماتور و چه حرفه‌ای، این معمای ذهنی به‌سرعت به یک وسواس تبدیل شد. نخست اثبات که در سال ۱۸۷۹ ارائه شد، ۱۱ سال باقی ماند تا اینکه ثابت شد نادرست است. جواب‌های اشتباه بیشتری از طرف وکلا، پزشکان و حتی نظریه‌پردازان معروف گراف دنبال شد. کارستن توماسن[1]، یک نظریه‌پرداز گراف در دانشگاه فنی دانمارک گفت: اینجا مسئله‌ای داریم که حتی یک کودک هم می‌تواند آن را بفهمد. فکر می‌کنم به‌همین دلیل چالش بزرگی بوده است.

در نهایت این قضیه تقریباً یک قرن بعد ثابت شد، اما با روش‌های کامپیوتری که در آن زمان رسواآمیز محسوب می‌شدند و باعث شد ریاضی‌دان‌ها درباره اثبات آن به شک بیفتند. این وضعیت تا سال ۱۹۹۷ یعنی زمانی که استفاده از کامپیوتر رایج شد، موضوع بحث

[1] Carsten Thomassen [2] Mikkel Thorup

باقی ماند و یک اثبات ساده‌تر با کمک کامپیوتر پیدا شد. با این‌حال طبق گفتهٔ میکل توراپ[۲] دانشمند کامپیوتر در دانشگاه کپنهاک مسئله چهار رنگ تا به امروز هم رایج است. او و توماسن خودشان را جزو افراد درگیر این مسئله حساب می‌کنند و معتقدند برای چنین بیانیه ساده‌ای، باید دلیل ساده‌تری وجود داشته باشد که چرا اساساً درست است یا دست‌کم یک راه حل کارآمدتر برای نشان دادن آن وجود داشته باشد.

پس از تقریباً یک دهه کار، توراپ، توماسن و چهار همکار دیگرشان در دانمارک، کانادا و ژاپن یک اثبات کامپیوتری دیگر برای قضیه ارائه کرده‌اند.



از چپ: کارستن توماسن، کن ایچی کاوارابایاشی[۵]، میکل توراپ و بویان موهار بخشی[۶] از تیمی هستند که اخیراً قضیهٔ چهار رنگ را دوباره ثابت کردند و در این روند روشی کارآمدتر برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ها و گراف‌ها نیز کشف کردند.

با همکاری میکل توراپ

این اثبات که در مارس ۲۰۲۶ به‌صورت برخط منتشر شد و در نوامبر در کنفرانس سالانهٔ بنیاد علوم کامپیوتر ارائه خواهد شد، از جهاتی حتی پیچیده‌تر از نمونه‌های قبلی‌اش است. جورج گونتیر[۷] دانشمند کامپیوتر در اینریا در پاریس گفت: به‌نظر می‌رسد آن‌ها در واقع در اجرای اثبات خود، از کامپیوتر و برق به‌طور آزادانه‌ای استفاده کرده‌اند، اما در فرایند ساختن استدلال‌شان، پژوهشگران راهی بسیار مؤثرتر برای رنگ آمیزی نقشه‌ها ارائه کردند و با انجام این کار، بینش‌های جدیدی دربارهٔ ویژگی‌های ساختاری گراف‌های مهمی در ریاضی به‌نام گراف‌های مسطح به‌دست آوردند که زمینه را برای پیشرفت در بسیاری از مسائل سرسخت دیگر نظریهٔ گراف فراهم می‌کند. با توجه به سابقه مسئله با شروع‌های ناموفق و امیدهای ازدست‌رفته گونتیر گفت: واقعاً هیجان‌انگیز است که برای یک‌بار یک نتیجهٔ واقعی ببینیم.

بحث کامپیوتری

در سال ۱۸۵۲ ریاضی‌دان فرانسیس گوتری[۸] در حال رنگ آمیزی نقشهٔ شهرستان‌های انگلیس بود که متوجه شد فقط به چهار رنگ نیاز دارد. او با خود فکر کرد، آیا این همیشه درست بوده است؟ او از برادرش فردریک که او هم ریاضی‌دان بود این سؤال را پرسید، کسی که استاد راهنمایش آگوستوس دمورگان[۹] نیز به این سؤال علاقه‌مند شد و تصمیم گرفت آن را به مخاطبان بیشتری ارائه کند.

در سال ۱۸۷۹ زمانی که یک ریاضی‌دان به نام آلفرد بری کمپ[۱۰] ادعا کرد که راه حلی پیدا کرده است، یک بیانیهٔ مطبوعاتی این دستاورد را در نشریهٔ نیچر اعلام کرد. کمپ با فرض کردن خلاف آنچه می‌خواست اثبات کند، شروع کرد: اینکه یک نقشه وجود دارد که نمی‌توان آن را فقط با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. سپس او تلاش کرد نشان دهد که این فرض نهایتاً به تناقض می‌رسد، به این معنا که چنین نقشه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد. در این صورت همه نقشه‌ها باید قابل رنگ‌آمیزی با چهار رنگ باشند.

ابتدا گفت: تصور کنید نقشه‌ای که طبق فرض شما نمی‌توان با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، تا حد ممکن مینیمال است: اگر بخواهی هر کشوری را از آن حذف کنی، نقشه باقی‌مانده را می‌توان با چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد. سپس جغرافیا و جزئیات اضافه را کنار بگذارید و نقشه‌تان را به گراف مسطح تبدیل کنید. هر کشور را به‌صورت یک نقطه (یا رأس) نشان دهید و اگر آن کشورها مرز مشترک دارند بین دو نقطه یک خط (یا یال) بکشید. مسئله رنگ‌آمیزی نقشهٔ شما حالا به یک مسئله رنگ آمیزی گراف تبدیل شده است و این مسئله به ابزارهای نظریهٔ گراف دسترسی پیدا می‌کند.



به‌خصوص در قرن هجدهم ریاضی‌دان سوئیسی، لئونارد اویلر، کشف کرد که گراف‌های مسطح ویژگی‌های مفید زیادی دارند، ازجمله تضمین اینکه هر گراف از این نوع دست‌کم یک رأس دارد که پنج یا کمتر همسایه دارد. این یعنی گراف مورد نظر باید دست‌کم

[7] Georges Gonthier [8] Francis Guthrie [9] Augustus De Morgan [10] Alfred Bray Kempe

یکی از این شش پیکربندی را داشته باشد، چیزی که کمپ آن را مجموعه اجتناب ناپذیر نامید:

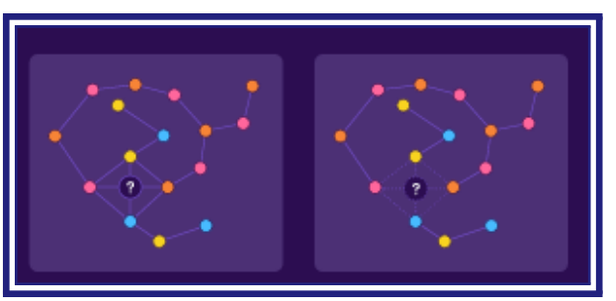


و چون گراف شما مینیمال است، اگر هرکدام از این پیکربندی‌ها را از آن حذف کنید، گرافی باقی می‌ماند که می‌توانید با چهار رنگ دوباره آن را رنگ‌آمیزی کنید.

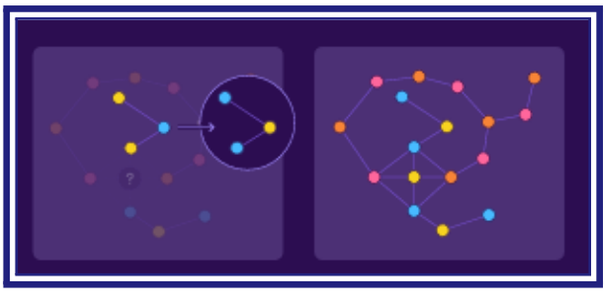
حرکت هوشمندانهٔ کمپ این بود که نشان دهد فرقی ندارد کدام یک از این پیکربندی‌ها حذف شود، همیشه می‌توانید راهی پیدا کنید تا رنگ‌های گراف را طوری جابه‌جا کنید که وقتی رأس حذف‌شده را دوباره اضافه می‌کنید، بتوانید همهٔ رأس‌ها را رنگ آمیزی کنید بدون آنکه به رنگ پنجم نیاز باشد.

اثبات مسئله چهار رنگ چگونه است؟

قضیهٔ چهار رنگ گراف‌های مسطح را درگیر می‌کند. رأس‌ها توسط یال‌هایی که با هم هیچ تداخلی ندارند به‌هم متصل می‌شوند (یال‌هایی که تنها در رأس‌ها یکدیگر را قطع کنند). برای اثبات آن باید نشان دهید که همیشه راهی وجود دارد که هر رأس را به‌گونه‌ای با یکی از چهار رنگ، رنگ کنید که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. در قسمتی کلیدی از اثبات، بخش‌های مشخصی از گراف را حذف می‌کنید، بخش‌های دیگر را دوباره رنگ می‌کنید و سپس بخش‌های حذف‌شده را دوباره اضافه می‌کنید. به این صورت ثابت می‌شود.



شکل سمت چپ: ابتدا با گرافی شروع کنید که به‌نظر می‌رسد با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. شکل سمت راست: یک رأس و یال‌های متصل به آن را حذف کنید.

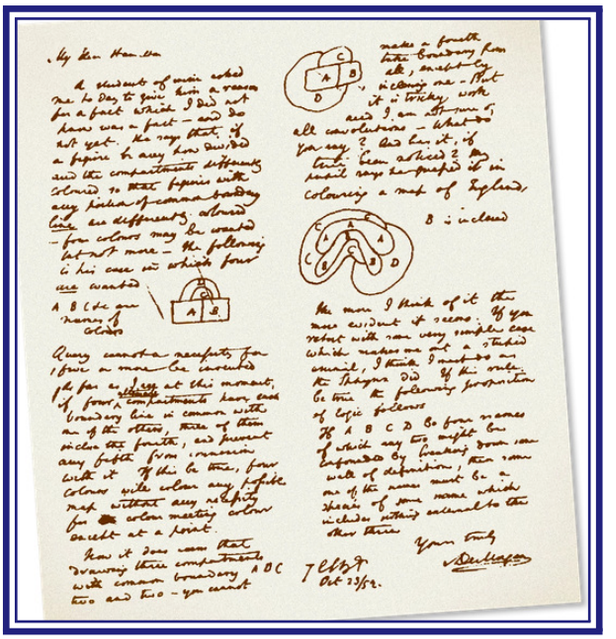


شکل سمت چپ: رنگ برخی از رأس‌های باقی مانده را عوض کنید. شکل سمت راست: رأس و یال‌های حذف‌شده را اضافه کنید.

با نشان دادن اینکه هرکدام از این پیکربندی‌ها به این روش کاهش‌پذیر است، شما ثابت کردید که گراف مینیمال در نهایت قابل رنگ‌آمیزی با چهار رنگ است، پس فرض اولیه‌تان اشتباه بوده و قضیه چهار رنگ حتماً درست است. متأسفانه ۱۱ سال بعد از اینکه کمپ اثبات آن را اعلام کرد، ریاضی‌دان پرسی جان هی وود[11] یک ایراد ظریف در روش تعویض رنگ او پیدا کرد: وقتی رأسی که حذف می‌کنید پنج همسایه داشته باشد، روش کمپ ممکن است باعث شود رنگ‌های یکسان کنار هم قرار بگیرند. هیوود ابتدا از گزارش دادن خطا خودداری کرد تا حدی به این دلیل که رویکرد کمپ خیلی شیک بود و درواقع با وجود اشتباه کمپ، روش تعویض رنگ او که امروزه به نام زنجیره کمپ شناخته می‌شود همچنان در مرکز راه‌حل‌های آینده برای این مسئله باقی خواهد ماند. توماسن گفت: جالب نیست که اشتباه تو آن‌قدر جذاب است که به اسم تو نامگذاری شده است؟ در نهایت هیچ‌کس نتوانست نشان دهد که آخرین پیکربندی در مجموعه اجتناب‌ناپذیر کمپ کاهش‌پذیر است. این نتیجه حاصل شد که در عوض یک اثبات درست به شناسایی یک مجموعهٔ بسیار بزرگ‌تر و پیچیده‌تر از ۸۹۰۰ پیکربندی نیاز دارد و باید نشان داد که همهٔ آن‌ها کاهش‌پذیر هستند. این کار با دست غیرممکن بود و به کامپیوتر نیاز داشت.

در سال ۱۹۷۶ ریاضی‌دان‌ها کنت اپل و ولفگانگ هاکن[12] راه زیبایی پیدا کردند تا ابتدا تعداد احتمالات را به ۱۹۳۶ پیکربندی کاهش دهند و بعد به ۱۴۸۲ برسانند. سپس از ابر رایانه‌های دانشگاه ایلینوی استفاده کردند تا هرکدام را به‌درستی بررسی کنند. درنهایت آن‌ها اعلام کردند که قضیهٔ چهار رنگ حل شد.

[11] Percy John Heawood [12] Wolfgang Haken



ریاضی‌دان بریتانیایی آگوستوس دمورگان تلاش کرد علاقهٔ گسترده‌تری به مسئله چهار رنگ ایجاد کند. او در نامه‌ای در سال ۱۸۵۲ به ریاضی‌دان و فیزیک‌دان پرکار ویلیام همیلتون نوشت: امروز یکی از دانشجویانم از من خواست دلیلی برای حقیقتی که نمی‌دانستم واقعیت است و هنوز هم نمی‌دانم به او بدهم.

مالکیت عمومی

آن‌ها با مخاطبی مشکوک روبرو شدند. آن زمان کامپیوترها ترسناک و از نظر فنی ناشناخته بودند. اپل و هاکن از حافظه مرکزی استفاده می‌کردند و اطلاعات را روی وسایل مغناطیسی ذخیره می‌کردند که به‌صورت دستی به شبکه‌ای از سیم‌ها بافته شده بود. دربارهٔ اینکه چطور می‌توان به این اثبات اعتماد کرد همه نوع بحث و جدلی وجود داشت. الن گتنر ریاضی‌دان دانشگاه کلرادو، دنور، گفت: چه می‌شود اگر موجی از الکتریسیته بیاید و شما آن پیکربندی خاص که می‌توانست اثبات را باطل کند، از دست بدهید؟ با این‌حال اکثر مردم سرانجام پذیرفتند که چهار رنگ کافی است. همان‌طور که بعداً دانشگاه ایلینوی روی تمبرهای پستی شان اعلام کرد. در سال ۱۹۹۷ یک تیم از ریاضی‌دان‌ها با ساده کردن روش اپل و هاکن با استفاده از یک کامپیوتر برای شناسایی و بررسی فقط ۶۳۳ پیکربندی موضوع را خاتمه دادند. این بار جامعهٔ ریاضی بلافاصله نتیجه را پذیرفت اما داستان هنوز به پایان نرسیده بود.

جست‌وجو در ناحیهٔ نامشخص

آخرین فصل این موضوع در سال ۲۰۱۵ در یکی از سواحل دانمارک شروع شد. کن ایچی کاوارابایاشی نظریه‌پرداز گراف در مؤسسه ملی انفورماتیک ژاپن در یک کنفرانس با توراپ همکار دیرینه‌اش حضور داشت. این دو نفر اخیراً با هم یک مقاله مهم منتشر کرده بودند (که باعث شد بعدها جایزهٔ معتبر فولکرسان[13] را دریافت کنند، جایزه‌ای که دهه‌ها قبل هم به اپل و هاکن برای کارشان روی مسئله چهار رنگ داده شده بود). حالا آن‌ها روی شن سفید نیبرگ[14] ایستاده بودند و فکر می‌کردند قدم بعدی چیست. کاوارابایاشی به‌یاد می‌آورد که این فکر از ذهنش گذشت: «ما واقعاً نمی‌توانیم روی یک پروژه کوچک کار کنیم.»

قضیهٔ چهار رنگ در طول دوران کاری‌شان تأثیر بزرگی داشته است. تا حدی آن‌ها را ترغیب کرد تا در وهلهٔ اول به نظریه‌پردازان گراف تبدیل شوند. با این حال آن‌ها از یک جنبهٔ نتیجهٔ ۱۹۹۷ ناراضی بودند: آن نتیجه به ریاضی‌دان‌ها یک روش برای رنگ‌آمیزی هر گراف با چهار رنگ داده بود، اما آن روش ناکارآمد بود. برای یک گراف با n رأس فرایند رنگ‌آمیزی به n^2 مرحله نیاز دارد. مشکل این بود که اگر یک گراف بزرگ به شما داده می‌شد و قصد رنگ‌آمیزی آن را داشتید، باید در آن به دنبال پیکربندی می‌گشتید که آن را حذف کنید، سپس پیکربندی دیگری می‌یافتید و آن را نیز حذف می‌کردید و این روند ادامه داشت تا اینکه گراف به چیزی کاهش پیدا می‌کرد که به‌طور واضح با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی باشد. کاوارابایاشی و توراپ که خیلی زود با توماسن و بویان موهار از دانشگاه سایمون فرایزر همراه شدند، می‌خواستند یک مجموعه ناگزیر از پیکربندی‌ها را شناسایی کنند که بتوان به‌صورت موازی کاهش داد و نه یکی‌یکی. آن‌ها برای این‌کار باید ضمانت کنند که می‌توانند هر پیکربندی را بدون دخالت در رنگ آمیزی‌های سایر پیکربندی‌هایی که همزمان در حال کاهش هستند، کاهش دهند. این به آن‌ها راه سریع‌تری برای رنگ‌آمیزی مجدد یک گراف تنها با چهار رنگ می‌دهد. چطور می‌توان این پیکربندی‌های تداخل‌ناپذیر را پیدا کرد؟ با جست‌وجوی گسترده.

در اثبات‌های قضیهٔ چهار رنگ در سال‌های ۱۹۷۶ و ۱۹۹۷، ریاضی‌دان‌ها فقط روی مناطقی تمرکز کردند که شامل خوشه‌هایی از رئوس با اتصالات کم بودند. کاوارابایاشی، موهار، توماسن و توراپ به‌جای آن توجه خود را به مناطق به‌اصطلاح صاف گراف

[13] Fulkerson Prize [14] Nyborg

معطوف کردند، جایی‌که هر رأس به شش رأس دیگر متصل است و یک چیدمان مثلثی از یال‌ها ایجاد می‌کند. این مناطق نوعی ناحیهٔ مشخص گرافیکی تشکیل می‌دهند: تشخیص پیکربندی‌های خوب در آنجا سخت‌تر است، زیرا نواحی صاف ساختاری که معمولاً برای اثبات کاهش‌پذیری یک پیکربندی استفاده می‌شود را ندارند، اما محققان متوجه شدند که نواحی صاف هم خیلی رایج‌تر هستند و برای اینکه بتوانند همزمان خیلی از پیکربندی‌ها را کم و دوباره رنگ کنند بدون اینکه با هم تداخل داشته باشند، به گزینه‌های زیادی برای انتخاب نیاز داشتند.



آتسویوکی میاشیتا (چپ) و یوتا اینوئه به جست‌وجوی ساختارهای مهم در مناطقی از گراف‌ها که معمولاً نادیده گرفته می‌شوند، کمک کردند.

به‌لطف یوتا اینوئه

جست‌وجو برای پیکربندی‌ها در این نواحی نیاز به دو ذهن دیگر داشت، دانشجویان تحصیلات تکمیلی کاوارابایاشی، به‌نام‌های یوتا اینوئه[15] و آتسویوکی میاشیتا[16] و ماه‌ها زمان برای پردازش رایانه‌ای. توراپ گفت: ما خیلی ساده‌لوح بودیم. هیچ تصوری نداشتیم از اینکه این‌قدر طول می‌کشد. اما در نهایت آن‌ها به یک مجموعه جدید و اجتناب‌ناپذیر رسیدند. این مجموعه عظیم بود و شامل ۸۲۰۲ پیکربندی می‌شد، اما همان‌طور که آن‌ها امیدوار بودند، امکان کاهش بسیاری از آن پیکربندی‌ها به‌طور همزمان در یک گراف مشخص وجود داشت و کاری که قبلاً چندین مرحله طول می‌کشید را به‌تنها چند مرحله تبدیل می‌کرد.

یک‌بار دیگر قضیهٔ چهار رنگ اثبات شده بود و اثبات جدید، الگوریتم رنگ‌آمیزی بسیار مؤثرتری ارائه داد: برای یک گراف با n رأس، به $n(\log n)$ مرحله نیاز داشت که پیشرفتی چشمگیر نسبت به n^2 بود.

افق‌های نو

مثل تلاش ناموفق کمپ بیش از یک قرن پیش، بیشترین ارزش اثبات جدید، کمتر به نتیجهٔ اصلی آن مربوط می‌شود و بیشتر به بینش‌های جدیدی که دربارهٔ ماهیت گراف‌ها ارائه می‌دهد مربوط است. با استفاده از یک مفهوم متفاوت از کاهش‌پذیری و بهره‌گیری از بخش‌های نادیده گرفته‌شدهٔ گراف، این‌کار ساختار ناشناخته‌ای را در این بخش مهم ریاضی آشکار کرده و به ریاضی‌دان‌ها ابزارهای جدیدی برای درک آن‌ها داده است. گتنر گفت: وقتی ماشین‌آلات را می‌سازید، متوجه می‌شوید چه نوع مشکلاتی را می‌توانید حل کنید. برای مثال نظریه‌پردازان گراف فقط به گراف‌های مسطح علاقه‌مند نیستند، بلکه به گراف‌هایی که روی انواع سطوح قرار می‌گیرند هم علاقه دارند، مثل تورس که شبیه به دونات است. این گراف‌ها برخی ویژگی‌های گراف‌های مسطح که در کار جدید کشف شده است را دارند و امکان اثبات قضایای رنگ‌آمیزی درباره آن‌ها را نیز فراهم می‌کند. محققانی که جدیدترین نتایج درباره قضیهٔ چهار رنگ را کشف کردند، حالا از تکنیک‌هایشان برای پرداختن به این سؤالات استفاده می‌کنند، البته هنوز موانعی وجود دارد اما توماسن گفت فکر می‌کنم مسیر درستی در پیش گرفته‌ایم.

در همین حال مسئله چهار رنگ همچنان پابرجاست. در حالی که توماسن از عملکرد اخیرش راضی است، هنوز همان سؤالی را دارد که علاقه‌مندان و حرفه‌ای های سرسخت برای ۱۵۰ سال است که دارند: آیا توضیح ساده‌تری است که چرا قضیه چهار رنگ برای هر گراف مسطح کافی است؟ آن توضیح افسانه‌ای تک صفحه‌ای، آن تز تئوریک که باعث شود همه بگویند "آها"؟ توماسن گفت: آنچه من می‌خواهم اثباتی بدون استفاده از کامپیوتر است و من هرگز از فکر کردن به آن دست نخواهم کشید.

* Gregory Barber (2026). The Four-Color Theorem Gets a Rare New Proof, Quanta Math.

*دانشگاه یزد

[15] Yuta Inoue [16] Atsuyuki Miyashita